

EXERCICES DE RÉVISION : CORRIGÉ (1)

Exercice 1

- $A = -\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$ soit $A = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (de la forme souhaitée avec $a=0$ et $b=-\frac{3}{2}$)
- $B = \frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3 \times (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{3\sqrt{2}+3}{2-1}$ soit $B = 3\sqrt{2}+3$
- $C = \frac{3\sqrt{2}-1}{4+3\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{2}-1)(4-3\sqrt{2})}{(4+3\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})} = \frac{12\sqrt{2}-18-4+3\sqrt{2}}{16-18} = \frac{-22+15\sqrt{2}}{-2}$ soit $C = 11 - \frac{15}{2}\sqrt{2}$

Exercice 2 (éléments de correction)

- $f_1(x) = 9(2x-3)^2 = 36x^2 - 108x + 81$
- $f_2(x) = (2)^2 - (\frac{x}{3})^2 = -\frac{x^2}{9} + 4$
- $f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$
- $f_4(x) = -(x^2-1)^2 = -x^4 + 2x^2 - 1$
- $f_5(x) = x^2 + 4\sqrt{3}x + 12$
- $f_6(x) = \underbrace{x^4 + 4x^2 + 9}_{3 \text{ carrés}} - \underbrace{4x^3 - 6x^2 + 12x}_{3 \text{ doubles produits}} = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$
- $f_7(x) = 6x^3 - 22x^2 + 18x - 18$
- $f_8(x) = 21x^2 + 14x - 6x^3 - 4x^2 + 2x^4 - 10x^3 + 7x - 35 = 2x^4 - 16x^3 + 17x^2 + 21x - 35$

Exercice 3 (éléments de correction)

- $f_1(x) = (2x-3)^2$
- $f_2(x) = [(2-x) - (1+3x)][(2-x) + (1+3x)] = (-4x+1)(2x+3)$
- $f_3(x) = (\sqrt{7}-\sqrt{5}x)(\sqrt{7}+\sqrt{5}x)$ ou $f_3(x) = 5(\frac{7}{5}-x^2) = 5(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}-x)(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}+x)$
- $f_4(x)$ n'est pas factorisable à l'ordre de facteurs du 1^{er} degré
(car c'est un trinôme de $\Delta < 0$)
- $f_5(x) = 2[(x+1)^2 - \frac{1}{2}] = 2(x+1 - \frac{\sqrt{2}}{2})(x+1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ (car $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)
- $f_6(x) = (1+2x)[1 - (5x-3) + (1+2x)] = (2x+1)(-3x+5)$
- $f_7(x) = (3x-5)[2(-4x+2) - (-4x+3)] = (3x-5)(-4x+1)$
- $f_8(x) = 2(x^2-1) + 3(x-1) - (x-1)^2 = (x-1)[2(x+1) + 3 - (x-1)] = (x-1)(x+6)$
- $f_9(x) = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$ (et x^2+1 non factorisable dans $\mathbb{R}$)

Exercice 4 (partiel)

2. $f_5(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{7}$ ou $x = -2 + \sqrt{7}$

$f_5(x) = (x+2)^2 - 4 - 3$ soit $f(x) = (x+2)^2 - 7$ (forme canonique)

f admet un minimum ($a > 0$) atteint en $x = -\frac{b}{2a} = -2$ qui vaut $f(-2) = -7$

Rq: $S(-2; -7)$ est le sommet de la parabole $\mathcal{C}_5$

La droite (verticale) $x = -\frac{b}{2a} = -2$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_5$

• $f_6(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$ (après calculs)

$f_6(x) = -2[x^2 - 2x - 3] = -2[(x-1)^2 - 1 - 3]$

soit $f_6(x) = -2[(x-1)^2 - 4]$ ou $f_6(x) = -2(x-1)^2 + 8$ (forme canonique)

f admet un maximum ($a < 0$) atteint en $x = 1$ qui vaut $f(1) = 8$

La droite $x = 1$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_6$

Exercice 5

• $(E_1) \Leftrightarrow x(2x-7) = 0 : S_1 = \{0; \frac{7}{2}\}$ ($c=0$: pas de calcul de Δ !)

• $(E_2) \Leftrightarrow x^2 = 5$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5} : S_2 = \{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\}$ ($b=0$: pas de calcul de Δ !)

• $(E_3) \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{3} : S_3 = \{-\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}}\}$

• $(E_4) \Leftrightarrow x^4 = 2$

$\Leftrightarrow (x^2)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \sqrt{2} : S_4 = \{-\sqrt{\sqrt{2}}; \sqrt{\sqrt{2}}\}$ Rq: $\sqrt{\sqrt{2}}$ se note aussi $\sqrt[4]{2}$ ou $2^{\frac{1}{4}}$

• $(E_5) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 4 = 0$ ou $2 - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4(\frac{2}{3})$ ou $x^2 = 2 : S_5 = \{\frac{8}{3}; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

• $(E_6) : (x+9)^2 - 81 + 82 = 0$

Rq: sans calculer, le calcul de Δ est compliqué

$\Leftrightarrow (x+9)^2 + 1 = 0 : S_6 = \emptyset$

• $(E_7) \Leftrightarrow x^3 = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ (car 1 est solution et $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc il ne peut pas y avoir plus d'une solution) d'où $S = \{1\}$

Rq: $(E_7) \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \dots$

• (E_8) est définie sur $\mathbb{R}$ (car x^2+1 ne s'annule jamais)

Sur $\mathbb{R}$, $(E_8) \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3} = 0$

Rq: si $A \neq 0$,

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}(-\frac{2}{4}) : S_8 = \{\frac{1}{6}\}$

$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$

• (E_9) est définie sur $\mathbb{R}^*$

Sur $\mathbb{R}^*$, $(E_9) \Leftrightarrow \frac{2a^2-3}{2a} = \frac{4}{2a}$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 3 = 4$

$\Leftrightarrow a^2 = \frac{7}{2}$

$S_9 = \{-\sqrt{\frac{7}{2}}; \sqrt{\frac{7}{2}}\}$

• (E_{10}) est définie si $x \neq 0, x \neq 1$ et $x \neq -1$ soit sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

Sur $\mathcal{D}$, $(E_{10}) \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) = 2x(x+1) - x(x-1)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 2x^2 + 2x - x^2 + x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 3 = 0 \quad (\Delta = 33)$

$\Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$ ou $x = \frac{3-\sqrt{33}}{4}$

d'où $S_{10} = \left\{ \frac{3+\sqrt{33}}{4}, \frac{3-\sqrt{33}}{4} \right\}$

• (E_{11}) est définie si $2x^2 - 5x - 3 \neq 0$ et $2x+1 \neq 0$ (soit $x \neq -\frac{1}{2}$)

En considérant : $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$\Delta = 49$ d'où 2 racines : $x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$

Rq fondamentale par la suite : $2x^2 - 5x - 3 = 2(x + \frac{1}{2})(x-3)$
 $= (2x+1)(x-3)$

Ainsi, (E_{11}) est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 3\}$

Sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 3\}$

$(E_{11}) \Leftrightarrow \frac{4x+2}{(2x+1)(x-3)} - \frac{x-1}{2x+1} = \frac{14}{(2x+1)(x-3)}$ (dénominateur commun : $(2x+1)(x-3)!$)

$\Leftrightarrow 4x+2 - (x-1)(x-3) = 14$

$\Leftrightarrow 4x+2 - x^2 + 3x + x - 3 = 14$

$\Leftrightarrow -x^2 + 8x - 15 = 0$

Or si l'on considère : $-x^2 + 8x - 15 = 0$, $\Delta = 4$

D'où 2 racines : $x_1 = 5$ et $x_2 = 3$ (après calculs)

On a donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 3\}$, $(E_{11}) \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 3$

Or $3 \notin \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 3\}$ d'où $S_{11} = \{5\}$ (3 est une solution à rejeter)

Exercice 6

• $(I_1) \Leftrightarrow 4(4-x) - 10(x-5) \leq 15(x+4) - 20x$

$\Leftrightarrow 16 - 4x - 10x + 50 \leq 15x + 60 - 20x$

$\Leftrightarrow -9x \leq -6$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$ soit $S_1 = [\frac{2}{3}; +\infty[$

• (I_2) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $(I_2) \Leftrightarrow f(x) > 0$ où $f(x) = \frac{9-4x^2}{x+1}$

On dresse le tableau de signes de $f(x)$ compte tenu de : $9-4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$		
$9-4x^2$	-	0	+	+	0	-	
$x+1$	-		-	0	+	+	
$f(x)$	+	0	-		+	0	-

Au vu du tableau, $S_2 =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup]-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

• $(I_3): (1-3x)(2x+4) \leq 0$

Soit on dresse le tableau de signes de $f(x) = (1-3x)(2x+4)$ en 2 temps,
soit on remarque que $f(x)$ est un trinôme du second degré tel que $a = -6 (< 0)$
de racines: $\frac{1}{3}$ et -2

D'où $S_3 =]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{3}; +\infty[$ ($f(x)$ du signe de $a =$ l'extérieur des racines)

• $(I_4) \Leftrightarrow 2x^2 - 5 < 0$

Or $2x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

Ainsi, $S_4 =]-\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}[$ (R_q : le signe de $2x^2 - 5$ est celui de $-a$ ($-a < 0$) entre les racines)

• $(I_5): \ln(x^2) > 1$

(I_5) est définie si $x^2 > 0$ soit $x \neq 0$; d'où (I_5) est définie sur $\mathbb{R}^*$

Sur $\mathbb{R}^*$, $(I_5) \Leftrightarrow x^2 > e$ (en appliquant la fonction exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$)
 $\Leftrightarrow x^2 - e > 0$ (avec $x^2 = e \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$ ou $x = -\sqrt{e}$)
 $\Leftrightarrow x \in]-\infty; -\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[$

D'où $S_5 =]-\infty; -\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[$

• $(I_6): 2\ln x > 1$

(I_6) est définie sur $]0; +\infty[$

Sur $]0; +\infty[$, $(I_6) \Leftrightarrow \ln x^2 > 1$
 $\Leftrightarrow x \in]-\infty; -\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[$

Compte tenu de la restriction sur $]0; +\infty[$, $S_6 =]\sqrt{e}; +\infty[$

• (I_7) est définie sur $\mathbb{R}$

$(I_7) \Leftrightarrow \frac{e^{2x-1}}{e^{-x+2}} \leq 2$

$\Leftrightarrow e^{3x-1} \leq 2$

$\Leftrightarrow 3x-1 \leq \ln 2$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{\ln 2 + 1}{3}$

Soit $S_7 =]-\infty; \frac{\ln 2 + 1}{3}]$

ou $(I_7) \Leftrightarrow \ln(e^{2x-1}) \leq \ln(2e^{-x+2})$
 $\Leftrightarrow 2x-1 \leq \ln 2 + \ln(e^{-x+2})$
 $\Leftrightarrow 2x-1 \leq \ln 2 - x+2 \dots$

(*) en appliquant la fonction ln strictement croissante sur $]0; +\infty[$

• (I_8) est définie sur $]0; +\infty[$

$(I_8) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ où $f(x) = (2\ln x + 3)(3e^{-x} - 2)$

On dresse le tableau de signes de $f(x)$ en commençant à étudier le signe de chaque facteur.

• $2\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2}$
 $\Leftrightarrow x = e^{-3/2} \approx 0,22$

$2\ln x + 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{3}{2}$
 $\Leftrightarrow x > e^{-3/2}$

• $3e^{-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{2}{3}$
 $\Leftrightarrow -x = \ln(\frac{2}{3})$
 $\Leftrightarrow x = -\ln(\frac{2}{3}) = \ln(\frac{3}{2})$
 $3e^{-x} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > \frac{2}{3}$
 $\Leftrightarrow -x > \ln(\frac{2}{3})$
 $\Leftrightarrow x < \ln(\frac{3}{2})$

D'où le tableau de signes de $f(x)$:

x	0	$e^{-3/2}$	$\ln(\frac{3}{2})$	$+\infty$
$2\ln x + 3$	-	0	+	+
$3e^{-x} - 2$	+	+	0	-
$f(x)$	-	0	+	-

Au vu du tableau, $S = [e^{-3/2}; \ln(\frac{3}{2})]$