

EXERCICES DE RÉVISION : CORRIGÉ (2)

Exercice 7

• $(E_m): 2mx - 3 = 3(x + 2m)$

$\Leftrightarrow (2m - 3)x = 6m + 3$

Deux cas sont donc à envisager :

• $2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3/2$

$(E_{3/2}) \Leftrightarrow 0 = 12$ d'où $S_{3/2} = \emptyset$ (en notant S_m l'ensemble des solutions de (E_m))

• Si $m \neq 3/2$,

$(E_m) \Leftrightarrow x = \frac{6m+3}{2m-3}$ et $S_m = \left\{ \frac{6m+3}{2m-3} \right\}$

En conclusion :

• si $m = 3/2$, (E_m) n'admet aucune solution

• si $m \neq 3/2$, (E_m) admet une unique solution : $S_m = \left\{ \frac{6m+3}{2m-3} \right\}$

• $(E'_m): (m+1)x^2 - 2mx + 1 - m = 0$

1^{er} cas : $m = -1$ ((E'_m) n'est pas alors une équation du second degré)

• $(E'_{-1}): 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ soit $S'_{-1} = \{-1\}$

2^{ème} cas : $m \neq -1$: (E'_m) est alors une équation du second degré

(E'_m) admet pour discriminant : $\Delta_m = (-2m)^2 - 4(m+1)(1-m)$
 $= 4m^2 - 4m + 4m^2 - 4 + 4m$

soit $\Delta_m = 8m^2 - 4$

NB : la discussion va donc porter sur le signe de Δ_m

On a : $\Delta_m = 0 \Leftrightarrow 2m^2 = 1$

$\Leftrightarrow m^2 = 1/2$

$\Leftrightarrow m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\sqrt{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

3 cas sont donc à envisager suivant le signe de Δ_m

• si $m \in]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$ (et $m \neq -1$) (*)

$\Delta_m > 0$ et (E'_m) admet 2 solutions : $x_1 = \frac{2m - \sqrt{8m^2 - 4}}{2(m+1)}$ et $x_2 = \frac{2m + \sqrt{8m^2 - 4}}{2(m+1)}$

• si $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{m - \sqrt{2m^2 - 1}}{m+1}$ et $x_2 = \frac{m + \sqrt{2m^2 - 1}}{m+1}$

$\Delta_m = 0$ et (E'_m) admet 1 unique solution :

$x_0 = \frac{2m}{2(m+1)} = \frac{m}{m+1}$

(*) $\sqrt{8m^2 - 4} = \sqrt{4(2m^2 - 1)} = 2\sqrt{2m^2 - 1}$

Rq : si $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_0 = \frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2 + 1} = \frac{-\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{(2)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{-2\sqrt{2} - 2}{4 - 2} = -\sqrt{2} - 1$

si $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_0 = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2 + 1} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} - 1$

• si $m \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}[$

$\Delta_m < 0$ et (E'_m) n'admet aucune solution

En conclusion :

- si $m = -1$: (E'_m) a donc une solution $S'_m = \{-1\}$
- si $m \in]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[\setminus \{-1\}$: (E'_m) a donc 2 solutions distinctes

$$S'_m = \left\{ \frac{m - \sqrt{2m^2 - 1}}{m+1} ; \frac{m + \sqrt{2m^2 - 1}}{m+1} \right\}$$
- si $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$: (E'_m) a donc une unique solution

$$S'_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \{-\sqrt{2}-1\} \text{ et } S'_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \{\sqrt{2}-1\}$$
- si $m \in]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}[$: (E'_m) n'a donc aucune solution : $S'_m = \emptyset$

Exercice 8

1. $(E_1) : -6(x^2)^2 - 7(x^2) + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ -6X^2 - 7X + 3 = 0 \end{cases}$

Or $-6X^2 - 7X + 3 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}$ ou $X = -\frac{3}{2}$ (après calcul : $\Delta = 121 \dots$)

D'où $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ X = \frac{1}{3} \text{ ou } X = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \text{ ou } x^2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

D'où $S_1 = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

2. $(E_2) : 10e^{2x} - e^{2x} + 3 = 0 \Leftrightarrow 10e^{2x} + 3e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 10(e^{2x})^2 + 3(e^{2x}) - 1 = 0$

D'où $(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{2x} \\ 10X^2 + 3X - 1 = 0 \end{cases}$

Or $10X^2 + 3X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{5}$ ou $X = -\frac{1}{2}$

Ainsi, $(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{2x} \\ X = \frac{1}{5} \text{ ou } X = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{5} \text{ ou } e^{2x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{5}$

Or $e^{2x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow x = \underline{\underline{S_2 = \left\{ -\ln 5 \right\}}}$

3. $(E_3) : 6 \ln x - \frac{5}{\ln x} = -7$

(E_3) est définie si : $x > 0$ et $\ln x \neq 0$ (soit $x \neq 1$)

(E_3) est définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[= \mathcal{D}$

Sur $\mathcal{D}$,

$(E_3) \Leftrightarrow 6(\ln x)^2 + 7 \ln x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ 6X^2 + 7X - 5 = 0 \end{cases}$

Or $6X^2 + 7X - 5 = 0 \Leftrightarrow X = -\frac{5}{3}$ ou $X = \frac{1}{2}$ ($\Delta = 169 = 13^2 \dots$)

D'où $(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ X = -\frac{5}{3} \text{ ou } X = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \ln x = -\frac{5}{3} \text{ ou } \ln x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = e^{-5/3} \text{ ou } x = e^{1/2}$ (on est bien dans $\mathcal{D}$)

En conclusion, $S = \underline{\underline{\left\{ e^{-5/3} ; e^{1/2} \right\}}}$