

Exercice 9

• $f_1: x \mapsto 3x^3 - 2x^2\sqrt{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$

En tant que polynôme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3)$ soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$

et de même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3)$ soit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$

• $f_2: x \mapsto \frac{x^3-1}{2x^2-x-1}$

f_2 est définie si $2x^2-x-1 \neq 0$ or $2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-\frac{1}{2}$

f_2 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 1\} =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; 1[\cup]1; +\infty[$

Limite en $+\infty$ et $-\infty$

En tant que fonction rationnelle, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{2x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{2} \right)$

D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = -\infty$ et de même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} \right) = +\infty$

Limite en $-\frac{1}{2}$ (forme du type " $\frac{0}{0}$ ")

Le signe de $2x^2-x-1$ est donné par :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} (x^3-1) = -\frac{9}{8} \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} (2x^2-x-1) = 0^+ \end{array} \right\} \text{ par quotient, } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f_2(x) = -\infty$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x^2-x-1$	+	0	-	+

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} (x^3-1) = -\frac{9}{8} \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} (2x^2-x-1) = 0^- \end{array} \right\} \text{ par quotient, } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f_2(x) = +\infty$$

Limite en 1 (forme " $\frac{0}{0}$ ") : 1 est racine du numérateur et du dénominateur qui peuvent l'un et l'autre être factorisés par $(x-1)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et $2x^2-x-1 = 2(x+\frac{1}{2})(x-1) = (2x+1)(x-1)$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 1\}$, $f_2(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{x^2+x+1}{2x+1}$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = \frac{1^2+1+1}{2(1)+1} = 1$ soit $\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = 1$

• $f_3: x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$

f_3 est définie si $x > 0$ et $x^2 \neq 0$: f_3 est définie sur $]0; +\infty[$

Limite en 0^+

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ par quotient, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = -\infty$$

Limite en $+\infty$

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = 0$ (rappel : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$)

• $f_4: x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

f_4 est définie si $\begin{cases} x^2+1 \neq 0 \text{ (toujours vrai)} \\ \frac{x^2-1}{x^2+1} > 0 \text{ soit } x^2-1 > 0 \text{ (puisque } x^2+1 > 0) \end{cases}$

Or $x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

f_4 est donc définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

Limites en $+\infty$ et $-\infty$

En tant que fonction rationnelle, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = 1$ } par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = 0$

Exactement de même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x) = 0$

Limites en -1 et en 1

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = 0^+$ } par composition, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f_4(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Exactement de même, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_4(x) = -\infty$

• $f_5: x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$

f_5 est définie si $x > 0$ et $x-1 \neq 0$ soit sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$

Limite en 0^+

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ } par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_5(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$

Limite en 1 (forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ")

$f_5(x) = \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1}$: on reconnaît le taux d'accroissement de la fonction $\ln$ en 1

Or $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

On a donc, $\lim_{x \rightarrow 1} f_5(x) = \ln'(1)$ soit $\lim_{x \rightarrow 1} f_5(x) = 1$

Limite en $+\infty$ (forme indéterminée " $\frac{\infty}{\infty}$ ")

Si $x > 1$, $f_5(x) = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (par croissance comparée) } par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$

• $f_6: x \mapsto e^{2x} - e^x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_6(x) = -1$

Par ailleurs, $f_6(x) = e^{2x}(1 - e^{-x} - e^{-2x})$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$ } par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x} - e^{-2x}) = 1$

• $f_7: x \mapsto \frac{e^x + 2}{2x^2 + 1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 1 \neq 0$)

Limite en $-\infty$ (pas de F.I.)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 1) = +\infty \end{array} \right\} \text{ par quotient } \underline{\lim_{x \rightarrow -\infty} f_7(x) = 0}$$

Limite en $+\infty$ (F.I. " $\frac{\infty}{\infty}$ ")

$$f_7(x) = \frac{e^x (1 + \frac{2}{e^x})}{x^2 (2 + 1/x^2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Par croissance comparée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \\ \text{Clairement, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 + 1/e^x}{2 + 1/x^2} \right] = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ par produit } \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_7(x) = +\infty}$$

• $f_8: x \mapsto \frac{e^x - x + 2}{1 - e^x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty$ (car $1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$)

Limite en $-\infty$ (pas de F.I.)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x + 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = 1 \end{array} \right\} \text{ par quotient } \underline{\lim_{x \rightarrow -\infty} f_8(x) = +\infty}$$

Limite en $+\infty$ (F.I. du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ")

$$\text{Pour tout } x \neq 0, f_8(x) = \frac{e^x (1 - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x})}{e^x (\frac{1}{e^x} - 1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}) = 1 \quad (\text{croissance comparée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x}{e^x}) = 0) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{e^x} - 1) = -1 \end{array} \right\} \text{ par quotient } \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_8(x) = -1}$$

Limite en 0 (forme " $\frac{0}{0}$ " qui n'est pas une F.I. : il faut étudier le signe du dénominateur)

On a : $1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow 0 > x$

Le tableau de signes de $1 - e^x$ est donné par :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^x$	$+$	0	$-$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - x + 2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x) = 0^+ \end{array} \right\} \text{ par quotient } \underline{\lim_{x \rightarrow 0^-} f_8(x) = +\infty}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - x + 2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^x) = 0^- \end{array} \right\} \text{ par quotient } \underline{\lim_{x \rightarrow 0^+} f_8(x) = -\infty}$$

• $f_9: x \mapsto -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \sin(x^2 + 1)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ (on doit avoir $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$)

Limite en 0^+

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (-\sqrt{x}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x^2 + 1) = \sin 1 \quad (\text{continuité de } x \mapsto \sin(x^2 + 1)) \end{array} \right\} \text{ par somme } \underline{\lim_{x \rightarrow 0^+} f_9(x) = +\infty}$$

Limite en $+\infty$

Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin(x^2 + 1) \leq 1$ soit $-\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 1 \leq f_9(x) \leq -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f_9(x) \leq -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1) = -\infty$ ($\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x}) = 0 \end{array}$)

Par comparaison (minoration), $\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_9(x) = -\infty}$

