

EXERCICES DE RÉVISION : CORRIGÉ (4)

Exercice 10

• $f_1: x \mapsto -2x \ln(1-2x)$

+ f_1 est définie si $1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

f_1 est donc définie sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$

Par ailleurs, $x \mapsto \ln(1-2x)$ est dérivable sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$ puisque $x \mapsto 1-2x$ est strictement positive sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$ et dérivable sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$

Comme produit de fonctions dérivables sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$, f_1 est dérivable sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$

+ Pour tout $x < \frac{1}{2}$,

$f'_1(x) = -2 \ln(1-2x) - 2x \left(\frac{-2}{1-2x} \right)$ soit pour $x < \frac{1}{2}$, $f'_1(x) = \frac{-2[(1-2x)\ln(1-2x) - 2x]}{1-2x}$

• $f_2: x \mapsto x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}}$

+ f_2 est définie sur $]0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et ne s'y annulant pas

+ $f_2 = \frac{1}{u}$ où pour $x > 0$, $u'(x) = x\sqrt{x}$ soit $u'(x) = \sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Pour $x > 0$, $f'_2(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$

$= \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3}$ soit pour $x > 0$, $f'_2(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}x^2} (*)$

(*) en effet, pour $x > 0$, $x = (\sqrt{x})^2$ et ainsi, $x^3 = x^2(\sqrt{x})^2 \dots$

Rq: nous verrons qu'on écrit: $\sqrt{x} = x^{1/2}$ et $f_2(x) = \frac{1}{x x^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2}$;

on aura alors en "prolongeant" les règles de dérivation des fonctions puissances;

pour $x > 0$, $f'_2(x) = -\frac{3}{2} x^{-5/2} = -\frac{3}{2 x^{5/2}} = -\frac{3}{2 x^2 x^{1/2}} = -\frac{3}{2 \sqrt{x} x^2} \dots$

• $f_3: x \mapsto \frac{e^{x^2-1}}{x+1}$

+ f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

+ Pour $x \neq -1$, $f'_3(x) = \frac{(2x e^{x^2-1})(x+1) - e^{x^2-1}}{(x+1)^2}$

soit pour $x \neq -1$, $f'_3(x) = \frac{e^{x^2-1}(2x^2+2x-1)}{x+1}$

• $f_4: x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1})$

+ $f_4 = \ln u$ où $u: x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

Comme $x \mapsto x^2+1$ est définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$,

u est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ avec en outre, $u > 0$ sur $\mathbb{R}$

f_4 est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

+ Pour tout $x > 0$, $u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

D'où pour tout $x > 0$, $f_4'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$

soit pour tout $x > 0$, $f_4'(x) = \frac{x}{x^2+1}$

• $f_5: x \mapsto 2 \cos^2(x - \frac{\pi}{3})$

+ f_5 est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$

+ $f_5 = 2u^2$ où $u: x \mapsto \cos(x - \frac{\pi}{3})$ soit $u': x \mapsto -\sin(x - \frac{\pi}{3})$

Pour tout $x > 0$, $f_5'(x) = 2(2u'(x)u(x))$
 $= 4(-\sin(x - \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{3}))$
 $= -4 \sin(x - \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{3})$

Où pour tout $a \in \mathbb{R}$, $2 \sin a \cos a = \sin 2a$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_5'(x) = -2 \sin(2x - \frac{2\pi}{3})$

• $f_6: x \mapsto \frac{-2}{(x^2+x+1)^5}$

+ Notons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 > 0$ (trinôme tel que $\Delta < 0$ et $a = 1 > 0$)
 f_6 est donc défini et dérivable sur $\mathbb{R}$

+ $f_6 = -2u^{-5}$ où $u: x \mapsto x^2+x+1$ soit $u'(x) = 2x+1$

D'où $f_6' = -2[-5u^{-6}u'] = \frac{10u'}{u^6}$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_6'(x) = \frac{10(2x+1)}{(x^2+x+1)^6}$