

Exercices de révision

Dans toute cette série d'exercices de révision, il est fortement déconseillé d'utiliser la calculatrice (on n'y recourra qu'en cas de force majeure).

Exercice 1 : Simplifications de racines carrées

Écrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont deux rationnels :

$$\bullet A = -\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \bullet B = \frac{3}{\sqrt{2}-1} \qquad \bullet C = \frac{3\sqrt{2}-1}{4+3\sqrt{2}}$$

Exercice 2 : Développements

Développer, réduire et ordonner les expressions algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet f_1(x) &= (3(2x-3))^2 & \bullet f_2(x) &= (2 + \frac{x}{3})(2 - \frac{x}{3}) \\ \bullet f_3(x) &= (-\frac{1}{2}x + 3)^2 & \bullet f_4(x) &= (-x^2 + 1)(x^2 - 1) \\ \bullet f_5(x) &= (-x - 2\sqrt{3})^2 & \bullet f_6(x) &= (x^2 - 2x - 3)^2 \\ \bullet f_7(x) &= (-3x^2 + 2x - 3)(6 - 2x) & \bullet f_8(x) &= (7x - 2x^2)(3x + 2) - (2x^3 + 7)(-x + 5) \end{aligned}$$

Exercice 3 : Factorisations

Factoriser dans $\mathbb{R}$ (au mieux) les expressions algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet f_1(x) &= 4x^2 - 12x + 9 & \bullet f_2(x) &= (2-x)^2 - (1+3x)^2 \\ \bullet f_3(x) &= -5x^2 + 7 & \bullet f_4(x) &= 9x^2 + 6x + 4 \\ \bullet f_5(x) &= 2(x+1)^2 - 1 & \bullet f_6(x) &= (1+2x) - (2x+1)(5x-3) + (1+2x)^2 \\ \bullet f_7(x) &= (6x-10)(-4x+2) - (3x-5)(-4x+3) & \bullet f_8(x) &= (2x^2-2) - 3(1-x) - (x-1)^2 \\ \bullet f_9(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Exercice 4 : Autour du second degré

On considère les 6 trinômes du second degré définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \bullet f_1(x) &= x^2 - 1 & \bullet f_2(x) &= -x^2 + 2 & \bullet f_3(x) &= 2x^2 \\ \bullet f_4(x) &= -\frac{1}{2}x^2 & \bullet f_5(x) &= x^2 + 4x - 3 & \bullet f_6(x) &= -2x^2 + 4x + 6 \end{aligned}$$

Pour $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, on note $\mathcal{C}_i$ la courbe représentative de f_i en repère orthogonal.

1. Pour $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, donner l'allure de $\mathcal{C}_i$.
2. Pour $i \in \llbracket 5; 6 \rrbracket$, résoudre $f_i(x) = 0$, factoriser $f_i(x)$, mettre $f_i(x)$ sous forme canonique, dire si f_i admet un extremum (si oui, en préciser les caractéristiques) puis donner l'allure de $\mathcal{C}_i$ (en indiquant les éventuels éléments de symétrie).

Exercice 5 : Équations

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet (E_1) : 2x^2 &= 7x & \bullet (E_2) : x^2 - 5 &= 0 & \bullet (E_3) : -3x^2 + 7 &= 0 \\ \bullet (E_4) : x^4 &= 2 & \bullet (E_5) : -5(\frac{3}{2}x - 4)(2 - x^2) &= 0 & \bullet (E_6) : x^2 + 18x + 82 &= 0 \\ \bullet (E_7) : x^3 &= 1 & \bullet (E_8) : \frac{-\frac{4}{3}x + \frac{2}{9}}{x^2 + 1} &= 0 & \bullet (E_9) : a - \frac{3}{2a} &= \frac{2}{a} \\ \bullet (E_{10}) : \frac{3}{x} &= \frac{2}{x-1} - \frac{1}{1+x} & \bullet (E_{11}) : \frac{4x+2}{2x^2-5x-3} - \frac{x-1}{2x+1} &= \frac{14}{2x^2-5x-3} \end{aligned}$$

Exercice 6 : Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- (I₁) : $\frac{4-x}{5} - \frac{x-5}{2} \leq \frac{3(x+4)}{4} - x$
- (I₂) : $\frac{9-4x^2}{x+1} \geq 0$
- (I₃) : $(1-3x)(2x+4) \leq 0$
- (I₄) : $2x^2 < 5$
- (I₅) : $\ln(x^2) > 1$
- (I₆) : $2 \ln x > 1$
- (I₇) : $e^{2x-1} \leq 2e^{-x+2}$
- (I₈) : $(2 \ln x + 3)(3e^{-x} - 2) \geq 0$

Exercice 7 : Équations avec paramètres

m désignant un paramètre réel, résoudre les équations :

- (E _{m}) : $2mx - 3 = 3(x + 2m)$
- (E' _{m}) : $(m+1)x^2 - 2mx + 1 - m = 0$

Dans le cadre de la résolution de ce type d'équations avec paramètre, on dit qu'on est amené à faire une **discussion** suivant les valeurs du paramètre.

Exercice 8 : Résolution d'équations par changement d'inconnue

Résoudre les équations suivantes :

1. (E₁) : $-6x^4 - 7x^2 + 3 = 0$
2. (E₂) : $10e^x - e^{-x} + 3 = 0$
3. (E₃) : $6 \ln x - \frac{5}{\ln x} = -7$

Exercice 9 : Ensembles de définition et limites

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer son ensemble de définition et déterminer les limites de la fonction aux bornes de ce dernier :

- $f_1: x \mapsto 3x^3 - 2x^2\sqrt{2}$
- $f_2: x \mapsto \frac{x^3 - 1}{2x^2 - x - 1}$
- $f_3: x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$
- $f_4: x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$
- $f_5: x \mapsto \frac{\ln x}{x - 1}$
- $f_6: x \mapsto e^{2x} - e^x - 1$
- $f_7: x \mapsto \frac{e^x + 2}{2x^2 + 1}$
- $f_8: x \mapsto \frac{e^x - x + 2}{1 - e^x}$
- $f_9: x \mapsto -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \sin(x^2 + 1)$

Exercice 10 : Dérivation

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer son ensemble de définition, son domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de cette fonction sur son domaine de dérivabilité (au mieux simplifiée) :

- $f_1: x \mapsto -2x \ln(1 - 2x)$
- $f_2: x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}}$
- $f_3: x \mapsto \frac{e^{x^2-1}}{x+1}$
- $f_4: x \mapsto \ln(\sqrt{x^2 + 1})$
- $f_5: x \mapsto 2 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
- $f_6: x \mapsto \frac{-2}{(x^2 + x + 1)^5}$