

Rappels (et compléments) autour du second degré

Dans toute la suite, on considère le trinôme¹ $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$).²

Forme canonique

- Il a été démontré au lycée que le trinôme peut s'écrire :

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{où } \Delta = b^2 - 4ac$$

L'une ou l'autre de ces formes est qualifiée de **forme canonique** du trinôme : c'est une forme intermédiaire entre la forme développée et la forme factorisée. Tous les résultats concernant le trinôme (ou les équations du second degré) sont établis à partir de cette forme canonique.

La forme précédente n'est pas à retenir par cœur, mais il est en revanche impératif de savoir pratiquement comment l'obtenir.

Méthode pratique

Cas où $a = 1$

- Mise sous forme canonique de $f_1(x) = x^2 - 6x + 8$.

L'idée consiste à considérer les deux premiers termes en x du trinôme comme le début d'un carré.

Ici, $x^2 - 6x$ est le début de $(x - 3)^2$: $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 3^2$ (pour équilibrer l'égalité, on retranche 3^2 , dernier terme du développement de $(x - 3)^2$).

On a : $f_1(x) = (x - 3)^2 - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1$: forme canonique de f_1 .

Remarquons que la forme canonique permet d'observer que $f_1(x)$ est factorisable dans $\mathbb{R}$.

On a : $f_1(x) = (x - 3)^2 - 1^2 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x - 4)(x - 2)$.

Cas où $a \neq 1$

- Mise sous forme canonique de $f_2(x) = 2x^2 - x - 10$.

On commence par factoriser le trinôme par a (ici $a = 2$) puis on applique la technique précédente.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f_2(x) &= 2 \left[x^2 - \frac{1}{2}x - 5 \right] \\ &= 2 \left[\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \right)^2 - 5 \right] \quad \left(x^2 - \frac{1}{2}x \text{ est le début de } \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 \right)^3 \\ &= 2 \left[\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{81}{16} \right] = 2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{81}{8} : \text{forme canonique de } f_2. \end{aligned}$$

Remarquons là encore que la forme canonique permet d'observer que $f_2(x)$ est factorisable dans $\mathbb{R}$.

$$\text{On a : } f_2(x) = 2 \left[\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{9}{4} \right)^2 \right] = 2 \left[\left(x - \frac{1}{4} - \frac{9}{4} \right) \left(x - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \right) \right] = 2 \left(x - \frac{5}{2} \right) (x + 2) = (2x - 5)(x + 2).$$

- Mise sous forme canonique de $f_3(x) = -x^2 + 3x - 5$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f_3(x) &= - \left[x^2 - 3x + 5 \right] \\ &= - \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + 5 \right] \\ &= - \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{11}{4} \right] = - \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{11}{4} : \text{forme canonique de } f_3. \end{aligned}$$

Remarquons que la forme canonique permet cette fois d'observer que $f_3(x)$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$ (somme de deux quantités négatives, dont l'une l'est strictement).

Racines, factorisation et signe du trinôme

- C'est à partir de la forme canonique qu'on obtient les formules donnant les racines d'un trinôme (ou d'une équation du second degré) en fonction du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$. Nous ne les rappelons pas ici, nous contentant d'étudier quelques exemples et d'énoncer une mise en garde.

- Racines de $f_1(x) = -2x^2 - 6x - 3$

On calcule $\Delta = (-6)^2 - 4(-2)(-3) = 36 - 24 = 12$ (avec $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$).

Le trinôme admet deux racines : $x_1 = \frac{6-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{6+2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-3-\sqrt{3}}{2} = -\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

1. On parle également de *trinôme du second degré* ou de *fonction polynomiale du second degré*.

2. Dans le cas des fonctions polynomiales, on s'autorisera à écrire « on considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$. »

3. Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $x^2 + \alpha x$ est le début de $(x + \frac{\alpha}{2})^2$.

- Racines de $f_2(x) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$

On calcule $\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4(2)(1) = 8 - 8 = 0$.

Le trinôme admet une racine double : $x_0 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Racines de $f_3(x) = \pi x^2 - 6x + 3$

On calcule $\Delta = (-6)^2 - 4(\pi)(3) = 36 - 12\pi = 12(3 - \pi)$ soit $\Delta < 0$: le trinôme n'admet donc pas de racine réelle.

Attention, comme vont l'illustrer les exemples qui suivent, il est des cas où le calcul de Δ est à proscrire (il serait extrêmement maladroit).

- Résoudre $(E_1) : -3x^2 + 5x = 0$ (cas où $c = 0$)

On a : $(E_1) \iff x(-3x + 5) = 0$

$$\iff x = 0 \text{ ou } -3x + 5 = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{3} \text{ soit } \mathcal{S}_1 = \{0; \frac{5}{3}\}$$

- Résoudre $(E_2) : 5x^2 - 3 = 0$ (cas où $b = 0$)

On a : $(E_2) \iff x^2 = \frac{3}{5}$

$$\iff x = \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{3}{5}} \text{ soit } \mathcal{S}_2 = \left\{ \sqrt{\frac{3}{5}}; -\sqrt{\frac{3}{5}} \right\}$$

- Résoudre $(E_3) : -2x^2 - 1 = 0$ (cas où $b = 0$)

On a : $(E_3) \iff x^2 = -\frac{1}{2}$ soit $\mathcal{S}_3 = \emptyset$

- Résoudre $(E_4) : -3(2x - 1)^2 + 9 = 0$ (équation écrite sous forme canonique : inutile de développer !)

On a : $(E_4) \iff (2x - 1)^2 = 3$

$$\iff 2x - 1 = \sqrt{3} \text{ ou } 2x - 1 = -\sqrt{3}$$

$$\iff x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ soit } \mathcal{S}_4 = \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Dans les quatre équations précédentes on a utilisé la proposition suivante :

Proposition : Résolution de $X^2 = m$

On considère l'équation $(E_m) : X^2 = m$ de paramètre m réel :

- si $m > 0$, (E_m) admet deux solutions : $\sqrt{m}$ et $-\sqrt{m}$;
- si $m = 0$, (E_m) admet 0 pour unique solution ;
- si $m < 0$, (E_m) n'admet pas de solution.

- C'est également à partir de la forme canonique qu'on obtient, quand elle est possible, la factorisation du trinôme à l'aide de facteurs du premier degré.

Factorisation du trinôme

On considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- si f admet deux racines x_1 et x_2 (cas $\Delta > 0$) alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- si f admet une racine double x_0 (cas $\Delta = 0$) alors $f(x) = a(x - x_0)^2$;
- si f n'admet aucune racine (cas $\Delta < 0$) alors $f(x)$ n'est pas factorisable (dans $\mathbb{R}$) à l'aide de facteurs du premier degré.

On reprend à titre d'illustration les exemples précédents.

- On a vu que $f_1(x) = -2x^2 - 6x - 3$ admet comme racines $x_1 = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3-\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{On a donc : } f_1(x) = -2 \left(x - \frac{-3+\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \left(-\frac{3+\sqrt{3}}{2} \right) \right) = -2 \left(x + \frac{3-\sqrt{3}}{2} \right) \left(x + \frac{3+\sqrt{3}}{2} \right).$$

- On a vu que $f_2(x) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ admet $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ comme racine double.

$$\text{On a donc : } f_2(x) = 2 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} (2x - \sqrt{2})^2.$$

- On a vu que $f_3(x) = \pi x^2 - 6x + 3$ n'admet aucune racine réelle : $f_3(x)$ n'est donc pas factorisable à l'aide de facteurs du premier degré.

- On se place dans le cas où le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 .
On a donc : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$.
En notant $S = x_1 + x_2$ la somme des racines et $P = x_1x_2$ le produit des racines, $f(x) = ax^2 - aSx + aP$.
Comme par ailleurs $f(x) = ax^2 + bx + c$, on obtient par identification des coefficients : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Proposition : Somme et produit des racines

On se place dans le cas où le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes.

En notant S la somme de ces racines et P leur produit, on a : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Application : cas d'une « racine évidente »

Il arrive parfois qu'un trinôme ou une équation du second degré admette une racine très simple : on parle de **racine évidente**. Dans ce cas, la seconde racine se trouve en utilisant (par exemple) le produit des racines.

- Factorisation de $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$.

On observe que 1 est racine de f . L'autre racine x_2 vérifie : $1 \times x_2 = \frac{-5}{2}$ soit $x_2 = -\frac{5}{2}$.

On a donc : $f(x) = 2(x - 1)(x + \frac{5}{2}) = (x - 1)(2x + 5)$.

- Résolution de (E) : $2025x^2 + 2024x - 1 = 0$.

On observe que -1 est racine de (E).

L'autre racine x_2 vérifie : $-1 \times x_2 = \frac{-1}{2025}$ soit $x_2 = \frac{1}{2025}$ et $\mathcal{S} = \{-1; \frac{1}{2025}\}$.

- À partir de la forme canonique puis de l'éventuelle factorisation, on peut déterminer le signe du trinôme.

Signe du trinôme

Le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de a , sauf entre les racines distinctes, quand elles existent⁴.

- Résoudre (I₁) : $-2x^2 - 6x - 3 \geq 0$

On a vu que $f_1(x) = -2x^2 - 6x - 3$ admet comme racines $x_1 = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3-\sqrt{3}}{2}$.

D'où, compte tenu de $a = -2$ (soit $a < 0$), $\mathcal{S}_1 = \left[-\frac{3+\sqrt{3}}{2}; \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right]$.⁵

- Résoudre (I₂) : $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 > 0$

On a vu que $f_2(x) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ admet $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ comme racine double.

D'où, compte tenu de $a = 2$ (soit $a > 0$), $\mathcal{S}_2 =]-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.⁶

- Résoudre (I₃) : $\pi x^2 - 6x + 3 \geq 0$

On a vu que $f_3(x) = \pi x^2 - 6x + 3$ n'admet aucune racine réelle.

D'où, compte tenu de $a = \pi$ (soit $a > 0$), $\mathcal{S}_3 = \mathbb{R}$.

On déduit de la résolution de $X^2 = m$ ($\Leftrightarrow X^2 - m = 0$) et du signe du trinôme, la proposition suivante :

Proposition : Résolution de $X^2 \geq m$ et $X^2 < m$

Considérant m , paramètre réel strictement positif ($m > 0$), on a :

- $X^2 \geq m \Leftrightarrow X \in]-\infty; -\sqrt{m}] \cup [\sqrt{m}; +\infty[;$
- $X^2 < m \Leftrightarrow X \in]-\sqrt{m}; \sqrt{m}[.$

- Résoudre (I₁) : $3x^2 - 5 \leq 0$

On a (I₁) $\Leftrightarrow x^2 < \frac{5}{3}$ soit $\mathcal{S}_1 = \left[-\sqrt{\frac{5}{3}}; \sqrt{\frac{5}{3}}\right]$.

- Résoudre (I₂) : $(-2x + 1)^2 > 8$

On a : (I₂) $\Leftrightarrow (-2x + 1) < -2\sqrt{2}$ ou $(-2x + 1) > 2\sqrt{2}$ ($\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$)

$$\Leftrightarrow -2x < -1 - 2\sqrt{2} \text{ ou } -2x > -1 + 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2} + \sqrt{2} \text{ ou } x < \frac{1}{2} - \sqrt{2} \text{ soit } \mathcal{S}_2 =]-\infty; \frac{1}{2} - \sqrt{2}[\cup]\frac{1}{2} + \sqrt{2}; +\infty[.$$

4. Dans ce cas ($\Delta > 0$), on retiendra que « le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines ».

5. On cherche donc les réels pour lesquels le trinôme est du signe de $-a$: ils sont *entre les racines* (attention à l'ordre des racines : $x_2 < x_1$).

6. Pour tous les réels x excepté la racine, $f_2(x) > 0$.

Aspect graphique

- Le plan est désormais rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Courbe représentative d'un trinôme

La courbe représentative du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la **parabole** $\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$.

Ses caractéristiques sont les suivantes :

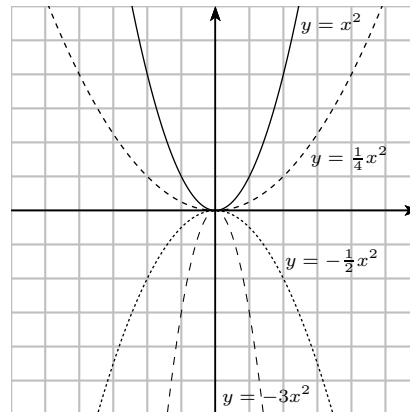
- $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut si $a > 0$, tournée vers le bas si $a < 0$;
- la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ est axe de symétrie de $\mathcal{P}$;
- $\mathcal{P}$ admet pour sommet le point $S(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$.

Par ailleurs, comme nous l'illustrons ci-contre, notons que plus $|a|$ est grand (resp. petit), plus la parabole est resserrée (resp. évasée).

On a tracé ici quatre paraboles du type $y = ax^2$ ($a \in \mathbb{R}^*$), de même sommet O :

- $y = \frac{1}{4}x^2$ ($a = \frac{1}{4}$)
- $y = -\frac{1}{2}x^2$ ($a = -\frac{1}{2}$)
- $y = x^2$ ($a = 1$)
- $y = -3x^2$ ($a = -3$)

Comme $|\frac{1}{4}| < |-\frac{1}{2}| < |1| < |-3|$, ces 4 paraboles ont été précédemment ordonnées de la plus évasée à la moins évasée (ie. la plus resserrée).



Tracé de la parabole

Une nouvelle fois, la forme canonique va permettre de très rapidement donner l'allure d'une parabole.

- Tracé de $\mathcal{P}_1 : y = x^2 - 4x + 1$ (on notera $f_1(x) = x^2 - 4x + 1$).

On a sans peine, $f_1(x) = (x - 2)^2 - 3$ (forme canonique de $f_1(x)$).⁷

Notons $S_1(2; -3)$ le sommet de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{R}_1$ le repère $\mathcal{R}_1 = (S_1, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point du plan, de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, de coordonnées (X, Y) dans $\mathcal{R}_1$.

On a : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{S_1M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ et $\vec{OS_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, d'où $\vec{S_1M} = \vec{OM} - \vec{OS_1} = (x - 2)\vec{i} + (y + 3)\vec{j}$.

On en déduit que $X = x - 2$ et $Y = y + 3$: formules de changement de repère.

On a alors : $M \in \mathcal{P}_1 \iff y = (x - 2)^2 - 3$ (équation de $\mathcal{P}_1$ dans le repère $\mathcal{R}$)

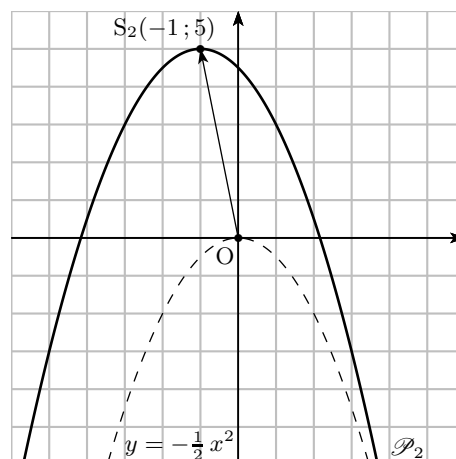
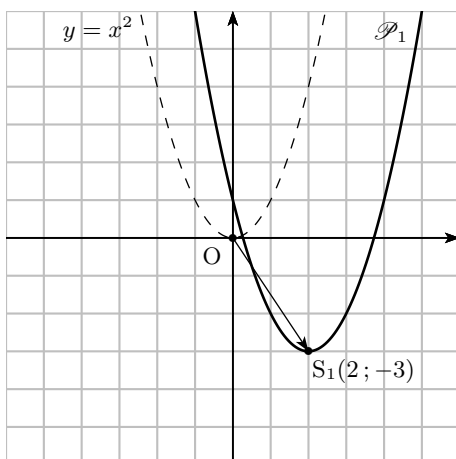
$\iff Y = X^2$: c'est l'équation de $\mathcal{P}_1$ dans le repère $\mathcal{R}_1$.

Il en découle que $\mathcal{P}_1$ se déduit de la parabole $y = x^2$ par translation de vecteur $\vec{OS_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

- Tracé de $\mathcal{P}_2 : y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}$, (on notera $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}$).

On a sans peine, $f_2(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 5$ (forme canonique de $f_2(x)$).

En notant $S_2(-1; 5)$ le sommet de $\mathcal{P}_2$, on montrerait comme précédemment que $\mathcal{P}_2$ se déduit de la parabole $y = -\frac{1}{2}x^2$ par translation de vecteur $\vec{OS_2} = -\vec{i} + 5\vec{j}$.



7. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x - 2)^2 \geq 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) \geq -3$ soit $f_1(x) \geq f_1(2)$ (car $f_1(2) = -3$) : f_1 admet un minimum atteint en 2 qui vaut $f_1(2) = -3$ (à associer avec $S_1(-\frac{b}{2a}; f_1(-\frac{b}{2a}))$ sommet de $\mathcal{P}_1$, parabole tournée vers le haut).