

TD1 : Éléments de logique - Ensembles - Arithmétique

Des symboles peuvent apparaître à côté du numéro des exercices. Ils indiquent :

- ✓ : des exercices proches du cours qui seront (en principe) faits en classe ou à préparer pour le cours suivant ;
- ✎ : des exercices à préparer pour les TD ou faits pendant les TD ;
- * : des exercices plus délicats (pas forcément traités en classe).

Logique

Exercice 1 ✓

Compléter les pointillés par le connecteur logique (le plus fort) qui convient : $\iff$; $\Leftarrow$ ou $\Rightarrow$.

Quand il n'y a pas équivalence, on justifiera que l'implication réciproque n'est pas valide.

Pour chaque point, reformuler ensuite de deux manières différentes la proposition à l'aide d'une des locutions « il est nécessaire » (ou « il faut »), « il suffit » ou « il faut et il suffit », sur le modèle proposé au point 1.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \dots\dots x = 2$.

Compléter alors les deux assertions suivantes à l'aide de la locution idoine :

- Se donnant $x \in \mathbb{R}$, pour que $x^2 = 4 \dots\dots$ que $x = 2$.
- Se donnant $x \in \mathbb{R}$, pour que $x = 2 \dots\dots$ que $x^2 = 4$.

2. $\forall z \in \mathbb{C}, z = \bar{z} \dots\dots z \in \mathbb{R}$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, x = \pi \dots\dots e^{2ix} = 1$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \text{« } n \text{ est un multiple de } 6 \text{ »} \dots\dots \text{« } n \text{ est un multiple de } 3 \text{ »}$.

5. Pour tout quadrilatère Q , « Q est un carré » $\dots\dots$ « Q est un losange ».

6. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, « f est continue en 0 » $\dots\dots$ « f est dérivable en 0 ».

Exercice 2 ✓

Pour chacune des assertions suivantes, donner sa valeur de vérité puis indiquer sa négation :

1. $\forall x > 1, x > 2$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 \implies x \leq 2$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 100 \iff x \geq 10$

4. $\exists n \in \mathbb{N} / n^2 - 21n + 110 \leq 0$

5. $\exists n \in \mathbb{N} / n^2 - 21n + 110 < 0$

6. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, x < y \implies \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ Remarque : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ peut également s'écrire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

7. $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x < 0 < y \text{ et } x^2 > y^2)$

8. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{x} > \sqrt{y} \implies x \geq y$

Exercice 3 ✓

On considère les quatre assertions suivantes :

- $P : \exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
- $Q : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x + y > 0$
- $R : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
- $S : \exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$

1. Dire pour chacune si elle est vraie ou fausse.
2. Donner la négation de chacune des assertions.

Exercice 4

P , Q et R désignent trois assertions.

1. Montrer l'équivalence $(P \iff Q) \iff (\text{non } P \iff \text{non } Q)$.

2. Montrer l'équivalence $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$.

Cette équivalence (assez naturelle) a été utilisée sans justification dans le cours. On parle de **distributivité** du « et » par rapport au « ou ».

3. **En déduire** l'équivalence $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$.

Exercice 5 ✓

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Traduire par une phrase chacune des propositions suivantes puis donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ ($I = \mathbb{R}$) pour laquelle l'assertion est vraie :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
2. $\exists x \in I / f(x) \neq 0$
3. $\exists x \in I, \exists y \in I / f(x) \neq f(y)$
4. $\forall x \in I, (f(x) = 0 \implies x = 0)$
5. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I / f(x) = y$
6. $\forall x \in I, \forall y \in I, (f(x) = f(y) \implies x = y)$

Exercice 6

Dans la suite, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs.

1. La fonction f ne prend pas de valeurs (strictement) négatives.
2. Tout réel admet (au moins) deux antécédents par f .
3. La fonction f n'est pas constante (on proposera deux formulations).
4. La courbe représentative de fonction f coupe celle de la fonction carrée.

Exercice 7 *

Déterminer l'ensemble des réels x tels que la proposition (ou prédicat) $\mathcal{P}(x)$ soit vraie :

$$\mathcal{P}(x) : \forall t \in [0; 1], x \geq t \implies x \geq 2t.$$

Ensembles

Exercice 8

1. E désignant un ensemble, a et b deux éléments de E , préciser quelles assertions il est possible d'écrire :

- | | | |
|--------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|
| a. $a \in E$ | b. $a \subset E$ | c. $\{a\} \subset E$ |
| d. $\emptyset \in E$ | e. $\emptyset \subset E$ | f. $\{\emptyset\} \subset E$ |
| g. $(a, b) \in \mathcal{P}(E)$ | h. $\{b, a\} \in \mathcal{P}(E)$ | i. $E \subset \mathcal{P}(E)$ |

2. On considère l'ensemble $F = \{a, b, c, d\}$. Définir en extension $\mathcal{P}(F)$.

Exercice 9 ✓

On considère dans $\mathbb{R}$ les ensembles $A = [4; 7]$, $B = [-5; 5]$ et $C = \mathbb{N}$.

Donner l'expression la plus simple possible de chacun des ensembles suivants :

- | | | | |
|------------------------|------------------------|--|--------------------------|
| a. $A \cup B$ | b. $A \cap C$ | c. $[-2; 12] \setminus B$ | d. $A \cap \overline{C}$ |
| e. $(A \cup B) \cap C$ | f. $A \cup (B \cap C)$ | g. $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$ | |

Exercice 10 ✓

Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles doit évoluer x pour que les assertions suivantes soient vraies :

1. $(x > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } x = 0$
2. $x > 3 \text{ et } x < 5 \text{ et } x \neq 4$
3. $(x \leq 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 4$
4. $x \geq 0 \implies x \geq 2$

**Exercice 11 **

On considère les ensembles $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - y = 5\}$ et $F = \{(t - 2, 3t - 11), t \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $E = F$.

Exercice 12 ✓

Proposer une (ou plusieurs) définition(s) des ensembles suivants (définition en extension, en compréhension, les deux...) :

1. L'ensemble des multiples de 3.
2. L'ensemble $\{1, 10, 100, 1000 \dots\}$.
3. L'ensemble des entiers naturels qui sont des carrés d'entiers.
4. L'ensemble des couples de réels dont la somme des deux *composantes* vaut 1.
5. L'intervalle $]0; 1]$.
6. L'ensemble des complexes de module 2.
7. L'ensemble des complexes imaginaires purs
8. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\frac{\pi}{4}$.
9. L'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
10. y désignant un réel, l'ensemble des antécédents de y par une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
11. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paires. *L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Exercice 13 ✎

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}) \implies (x + y \in \mathbb{Q} \text{ et } xy \in \mathbb{Q})$.
2. Une somme d'irrationnels est-elle toujours irrationnelle ? Un produit d'irrationnels est-il toujours irrationnel ?
3. Soit x un réel. Montrer que si x^2 est irrationnel, alors x est également irrationnel.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par l'absurde que : $(x \notin \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}) \implies x + y \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 14

Soient A, B et C trois ensembles.

On pose $X = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ et $Y = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.

Montrer que $X = Y$.

Plusieurs méthodes sont envisageables et on peut procéder autrement qu'en simplifiant les écritures de X et de Y .

Exercice 15 ✓

Soient E un ensemble, A, B et C trois parties de E .

Justifier les assertions suivantes :

1. $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.
2. $(A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset) \iff B = \overline{A}$.
3. $\{A \cap B, \overline{A} \cap B, \overline{B}\}$ est un recouvrement disjoint de E .
4. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercice 16 ✎

Soient E un ensemble, A, B et C trois parties de E .

Justifier les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$.
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$.
3. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$.
4. $[(A \cup B = A \cup C) \text{ et } (A \cap B = A \cap C)] \iff B = C$.

Exercice 17 *

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

Résoudre les deux équations suivantes d'inconnues $X \in \mathcal{P}(E)$:

1. $A \cap X = B$
2. $A \cup X = B$

Exercice 18 *

Soient E et B deux ensembles.

Déterminer dans chacun des deux cas suivants les inclusions possibles entre les deux ensembles proposés.

On justifiera chaque inclusion et en cas d'inclusion fausse, on donnera un contre-exemple.

1. $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(E \cap F)$
2. $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(E \cup F)$

Arithmétique

Exercice 19 ✓

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que le reste de la division euclidienne de n par 11 vaut 3
Que valent les restes de la division euclidienne de n^2 par 11, de n^3 par 11 ?
Avec l'outil congruence, le résultat à cette question serait immédiat...
2. Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer le reste de la division euclidienne de $n^2 + 3n + 1$ par $n - 1$.
3. Déterminer les entiers naturels n tels que $n + 1 \mid n^2 + 1$.

**Exercice 20 **

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On suppose que le reste de la division euclidienne de a par b est 8 et que le reste de la division euclidienne de $2a$ par b est 5. Que vaut b ?

Exercice 21 ✓

Soit n un entier relatif. Déterminer les PGCD suivants :

1. $\text{PGCD}(n + 1, n - 1)$
2. $\text{PGCD}(5n + 7, 3n + 4)$
3. $\text{PGCD}(5n + 7, 3n - 4)$
4. $\text{PGCD}(2n - 1, 9n + 4)$

Exercice 22 ✓

Déterminer les entiers $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\text{PPCM}(28, b) = 140$.

Exercice 23

Soient a et b deux entiers naturels non nuls, n un entier naturel et p un entier premier.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que $\text{PGCD}(a^n, b^n) = [\text{PGCD}(a, b)]^n$.
 - b. Montrer que $\text{PPCM}(a^n, b^n) = [\text{PPCM}(a, b)]^n$.
2. Soit p un entier premier. Montrer que : $p \mid \text{PPCM}(a, b) \iff (p \mid a \text{ ou } p \mid b)$.

Exercice 24 ✓

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $10^n - 1$ est divisible par 9.
2. $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.
3. $6 \mid 10^{3n+2} - 4^{n+1}$.

**Exercice 25 **

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Écrire de manière quantifiée la proposition : « p est un nombre premier ».
On donnera deux écritures.

Exercice 26 *

Soient deux rationnels dont la somme et le produit sont des entiers.
Montrer que ces deux rationnels sont eux-mêmes entiers.

Raisonnements divers

Exercice 27

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right) \iff \forall u, v \in \mathbb{R}, f(u+v) + f(u-v) = 2f(u)f(v)$.

Exercice 28 ✓

1. Le réel $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ?

2. Même question avec le réel $b = \sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$.

Exercice 29

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 30

Prouver que $\forall n \geq 1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

Exercice 31

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n + 1 \geq n^2$.

Exercice 32 ✓

1. Existe-t-il des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) + f(y) = 2f(x-y) + 1$?

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $(\star) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = 2[f(x) + f(y)] + xy - 4$.

Exercice 33 *

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $a \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe (au moins) un couple de réels (x, y) tel que : $x^2 + y^2 = axy$ et $xy \neq 0$.

Exercice 34

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + b2^n$.

Exercice 35

Montrer l'équivalence $(i) \iff (ii)$ où :

$(i) : \exists c \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = c$

$(ii) : \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2)$

Les deux propositions précédentes sont des **caractérisations** de « f est constante sur $\mathbb{R}$ ».

Exercice 36 *

1. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 8 \implies (\exists a, b \in \mathbb{N}, n = 3a + 5b)$.

2. Au rugby, il est possible de marquer 3 points (drop ou pénalité), 5 points (essai non transformé) ou enfin 7 points (essai transformé).

Au terme d'une partie, quels sont les totaux de points possibles pour une équipe ?

Exercice 37 *

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$) vérifiant les deux conditions (i) et (ii) suivantes :

$(i) : \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / u_n = p$ et $(ii) : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$.