

Chapitre 1 - Bilan méthodologique : Pratique de la démonstration

La démonstration est au cœur de l'activité mathématique.

Dans le premier chapitre initial sur les éléments de logique, nous avons été amenés à exposer certains schémas classiques, ceux permettant par exemple de démontrer une implication, une équivalence, une égalité d'ensembles...

Dans le prolongement de ce travail initial, l'objet de ce bilan méthodologique est de présenter les principales formes de raisonnement, celles qui entreront en jeu dans la pratique de la démonstration (raisonnement par récurrence, par l'absurde...).

Dans toute la suite, P et Q désignent deux propositions.

I Raisonnement par disjonction des cas

Raisonnement par disjonction des cas

Montrer qu'une proposition P est vraie par **disjonction des cas** consiste à montrer qu'elle est vraie dans un nombre fini de cas, ces cas couvrant tous les cas possibles.

Exemple 1

Montrer par disjonction des cas que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

- On va ici raisonner par disjonction des cas en examinant les deux cas : n pair puis n impair.
 - Si n est pair, n s'écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et on a alors $\frac{n(n+1)}{2} = p(n+1) \in \mathbb{N}$.
 - Si n est impair, n s'écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$ et on a alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(2p+2)}{2} = n(p+1) \in \mathbb{N}$.

Dans tous les cas, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$: le résultat annoncé a bien été démontré par disjonction des cas.

En remarquant que les deux entiers entiers n et $n+1$ sont consécutifs, on aurait pu directement affirmer que l'un des deux est pair et par conséquent, que le produit $n(n+1)$ l'est aussi, ce qui entraîne que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

II Raisonnement par contraposition

Considérant l'implication $P \implies Q$, on rappelle que sa *contraposée* désigne l'implication $\text{non } Q \implies \text{non } P$.

Nous avons vu dans le cours qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes : c'est ce résultat qui constitue le fondement du raisonnement par contraposition.

Raisonnement par contraposition

Pour démontrer l'implication $P \implies Q$, le **raisonnement par contraposition** (ou **par contraposée**) consiste à démontrer sa contraposée $\text{non } Q \implies \text{non } P$.

Exemple 2

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

- La proposition se présente sous la forme d'une implication, mais on perçoit rapidement qu'on aurait du mal à la démontrer directement : supposer que « $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 » est en effet difficilement exploitable... On peut en revanche traduire classiquement que « n est impair », ce qui invite à un raisonnement par contraposition.

On propose un raisonnement par contraposition.

Il s'agit donc de démontrer l'implication : n impair $\implies n^2 - 1$ divisible par 8.

Supposons que n est impair : n peut s'écrire $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$.

On a alors : $n^2 - 1 = (2p+1)^2 - 1 = 4p^2 + 4p = 4p(p+1)$.

Or d'après l'exemple 1, $\frac{p(p+1)}{2} \in \mathbb{N}$, autrement dit, $p(p+1)$ peut s'écrire : $p(p+1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Il s'ensuit que $n^2 - 1 = 8k$ soit $n^2 - 1$ divisible par 8.

Par contraposition, **l'implication initiale est donc bien démontrée.**

III Raisonnement par l'absurde

Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, le **raisonnement par l'absurde** consiste à faire l'hypothèse « P est fausse » puis à partir de là, raisonner par implications successives, jusqu'à l'obtention d'une contradiction manifeste, une absurdité : cette contradiction ne pouvant provenir que de l'hypothèse de départ, la proposition « P est fausse » est donc fausse ce qui entraîne que P est vraie.

Exemple 3 : Irrationalité de $\sqrt{2}$

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, autrement dit, qu'il ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers.

On s'autorisera à directement utiliser le résultat suivant, dont la démonstration sera vue dans la partie finale consacrée aux exercices : $\forall p \in \mathbb{N}, p \text{ pair} \iff p^2 \text{ pair}$.

► Ici la proposition « $\sqrt{2}$ est irrationnel » ne se prête pas à une démonstration directe car il n'est pas possible de tester tous les couples d'entiers pour vérifier que $\sqrt{2}$ ne peut effectivement pas s'écrire comme le quotient de deux d'entre eux.

On propose un raisonnement par l'absurde.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel : il existe donc deux entiers p et q strictement positifs tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Quitte à simplifier cette écriture, on peut supposer que p et q n'ont pas de diviseurs communs autres que 1.¹

On a alors par élévation au carré : $2q^2 = p^2$ d'où p^2 pair et en se référant au résultat mentionné plus haut, il en découle que p est pair.

Il existe donc $p' \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2p'$ soit $p^2 = 4p'^2$ et ainsi, $2q^2 = 4p'^2$ soit $q^2 = 2p'^2$: q^2 est donc pair et comme précédemment, il en découle que q est pair.

Les entiers p et q sont ainsi tous les deux pairs, ce qui est contradictoire avec le fait que p et q ont été choisis sans diviseurs communs autres que 1..

On a donc démontré par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Remarque : Synthèse concernant la démonstration de l'implication $P \implies Q$

Lorsqu'on souhaite démontrer une implication $P \implies Q$, on dispose de trois possibilités principales :

- Le raisonnement direct : on suppose que P est vraie et on montre sous cette hypothèse que Q est vraie.
- Le raisonnement par contraposition : on suppose que Q est fausse et on montre sous cette hypothèse que P est fausse.
- Le raisonnement par l'absurde : on suppose que P est vraie, puis on montre qu'en faisant l'hypothèse que Q est fausse, on aboutit à une absurdité.

Comme nous l'observerons en exercice, lorsqu'on cherche à démontrer une implication, les raisonnements par contraposition et par l'absurde sont voisins.

IV Raisonnements par récurrence

Dans toute cette partie, $\mathcal{P}(n)$ désigne une proposition dépendant de l'entier naturel n ; n_0 est quant à lui un certain entier naturel.

Le *raisonnement par récurrence* va être un moyen possible pour démontrer l'assertion « $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ » (autrement dit, que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$).²

Raisonnement par récurrence simple

Le **raisonnement par récurrence** repose sur le principe suivant :

- si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- si $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \text{ vraie} \implies \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$ (on dit que la proposition est **héréditaire**),
- alors $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

La rédaction d'un raisonnement par récurrence devra très soigneusement reprendre les différents étapes du principe ci-dessus exposé.

1. L'écriture $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ serait alors la forme dite irréductible de $\sqrt{2}$: les entiers p et q sont dits premiers entre eux.

2. On rappelle qu'écrire « on a P » sous-entend « P est vraie ».

Rédaction d'un raisonnement par récurrence simple

Un démonstration par récurrence simple doit impérativement suivre le schéma rédactionnel suivant :

- Si ce n'est déjà fait dans l'énoncé, on peut commencer par nommer la proposition que l'on souhaite démontrer par récurrence (par exemple $\mathcal{P}(n)$). Cette étape est conseillée mais n'est pas obligatoire.

- **Initialisation**

On montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (il s'agit souvent d'une simple vérification).

- **Hérédité**

On se donne un entier n quelconque ($n \geq n_0$) et on montre l'implication $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$.

Pratiquement on rédigera cette étape ainsi :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$.

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

⋮

- **Conclusion**

On conclut par une phrase du type : « Initialisée et héréditaire, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq n_0$. »

Exemple 4

Soit $x \in [-1; +\infty[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

- La proposition dépendant de l'entier n , il apparaît assez naturel de proposer un raisonnement par récurrence.³

Considérant $x \in [-1; +\infty[$, notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $(1+x)^n \geq 1+nx$ » et montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation**

On a d'une part $(1+x)^0 = 1$ et d'autre part $1+0 \times x = 1$ avec $1 \geq 1$ d'où $\mathcal{P}(0)$ vraie.

- **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a par hypothèse : $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Comme $x \geq -1$, $(1+x) \geq 0$ d'où par multiplication de l'inégalité précédente : $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$.

Ainsi, $(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ (car $nx^2 \geq 0$) : d'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion**

Initialisée et héréditaire, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Autrement dit, **étant donné** $x \in [-1; +\infty[$, **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, **$(1+x)^n \geq 1+nx$** .

Il arrive parfois qu'on ne puisse pas déduire $\mathcal{P}(n+1)$ de $\mathcal{P}(n)$, mais seulement $\mathcal{P}(n+2)$ de $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n)$. On peut alors opter pour une variante de la démonstration par récurrence simple : la *récurrence double*.

Raisonnement par récurrence double

Le **raisonnement par récurrence double** repose sur le principe suivant :

- si $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- si $\forall n \geq n_0$, $(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)) \implies \mathcal{P}(n+2)$,
- alors $\forall n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarques

- Une récurrence double n'est en fait qu'un cas particulier du raisonnement par récurrence simple en considérant pour $n \geq n_0$ la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ ».
- On adapte la rédaction de la manière suivante :
 - **Initialisation**
On montre que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies.
 - **Hérédité**
On se donne $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$.
On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on montre alors que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie...
- On peut de même recourir à une récurrence triple, quadruple...

3. Notons toutefois que dans un cadre plus restrictif ($x \geq 0$), une démonstration directe aurait été beaucoup plus rapide, via la formule du binôme de Newton.

- Il arrive parfois même qu'on ne sache déduire $\mathcal{P}(n+1)$ que de toutes les propositions antérieures $\mathcal{P}(n_0)$, $\mathcal{P}(n_0+1)$, $\dots$, $\mathcal{P}(n)$; on peut alors recourir à une *récurrence forte* en adaptant la rédaction comme suit :
 - **Initialisation**
On montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
 - **Hérédité**
On se donne $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \llbracket n_0, n \rrbracket$ et on montre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie...

Exemple 5

Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3$.

- La suite est définie par une récurrence linéaire d'ordre 2 et nous verrons bientôt comment déterminer directement la forme explicite de u_n . Mais l'énoncé impose une récurrence et à cette fin, la connaissance d'un terme de la suite nécessitant celle des deux précédents, il faut recourir à une récurrence double.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^n + 3$ » et montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.

• **Initialisation**

On a $u_0 = 4 = 2^0 + 3$ et $u_1 = 5 = 2^1 + 3$: $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont donc vraies.

• **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Par hypothèse : $u_n = 2^n + 3$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3$.

On a alors, $u_{n+2} = 3(2^{n+1} + 3) - 2(2^n + 3) = (3-1)2^{n+1} + (9-6) = 2^{n+2} + 3$ et $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• **Conclusion**

$\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 0$, autrement dit, **pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3$** .

Exemple 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n$.

- Chaque terme étant défini à partir de tous les précédents, on pense à s'engager dans une récurrence forte.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq 2^n$ » et montrons par récurrence forte que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation**

On a $u_0 = 1 = 2^0$ soit $u_0 \leq 2^0$: $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ avec $u_0 \leq 2^0$, $u_1 \leq 2^1$, $\dots$, $u_n \leq 2^n$ par hypothèse de récurrence.

On en déduit que $u_{n+1} \leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$ soit $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion**

$\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 0$, autrement dit, **pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n$** .

V Raisonnement par analyse-synthèse

On peut recourir à un *raisonnement par analyse-synthèse* quand on cherche à déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E vérifiant une certaine propriété, autrement dit, l'ensemble des solutions d'un problème donné.

Raisonnement par analyse-synthèse

Comme son nom le laisse présager, le raisonnement par analyse-synthèse se décompose en deux étapes :

• **Analyse**

On suppose que le problème admet des solutions et, se donnant l'une d'elles, on détermine par implications successives la forme qu'elle peut avoir : on obtient alors la **forme possible** des éventuelles solutions.

Dans l'étape d'analyse, on établit d'abord des **conditions nécessaires** sur les éventuelles solutions.

• **Synthèse**

Partant alors des solutions possibles, on détermine lesquelles sont bien solutions du problème posé.

On détermine ensuite dans l'étape de synthèse si les **conditions nécessaires** sont également **suffisantes**.

Exemple 7

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x+y) = x + f(y)$ ($\star$)

- On cherche bien à déterminer l'ensemble des solutions d'un problème donné, en l'occurrence une **équation fonctionnelle**; on pourrait également dire qu'on cherche à déterminer l'ensemble des éléments de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant la propriété ($\star$).

Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété ($\star$).

En appliquant la propriété ($\star$) avec le choix $y = 0$ on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + f(0)$.

Une éventuelle solution ne peut donc être qu'une fonction affine du type $f : x \mapsto x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ (fonction affine de pente 1).

• **Synthèse**

Commentaire (qui ne doit pas figurer dans la rédaction) : on cherche à savoir quelles sont, parmi les fonctions potentiellement solutions du problème posé, lesquelles le sont effectivement; on part donc d'une de ces fonctions et on examine à quelle(s) condition(s) elle satisfait à la propriété ($\star$).

Soit $f : x \mapsto x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a : $f(x+y) = (x+y) + c = x + (y+c) = x + f(y)$ et f satisfait à la propriété ($\star$).

Nouveau commentaire : on vient de montrer que toutes les fonctions déterminées comme potentiellement solutions dans l'étape d'analyse le sont (être solution aurait pu imposer une condition sur c , mais ce n'est ici pas le cas).

• **Conclusion**

Les fonctions solutions de l'équation fonctionnelle sont du type $f : x \mapsto x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$: ce sont exactement les fonctions affines de pente 1.

Remarque

Comme va l'illustrer l'exemple suivant, le raisonnement par analyse-synthèse est souvent employé pour montrer l'existence et l'*unicité* d'une solution à un problème donné (ce n'est qu'un cas particulier du précédent).

Exemple 8 : Partie paire et partie impaire d'une fonction

Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

- Étant donné une certaine fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on cherche à trouver les couples (g, h) de fonctions de $\mathcal{P} \times \mathcal{I}$ telles que $f = g + h$, $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) désignant l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour finalement montrer qu'il en existe un seul : on est bien dans le contexte où la mise en œuvre d'un raisonnement par analyse-synthèse semble indiqué.

Considérant une certaine fonction f , raisonnons par analyse-synthèse pour montrer qu'elle se décompose de façon unique sous la forme $f = g + h$ où g paire et h impaire.

• **Analyse**

Supposons qu'il existe un couple (g, h) solution du problème.

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x)$ (1).

En appliquant cette dernière relation à $-x$ on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(-x) + h(-x)$.

Puisque g est paire et que h est impaire, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(x) - h(x)$ (2).

En additionnant puis en soustrayant les relations (1) et (2) on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

À ce stade du raisonnement, on peut affirmer que si une décomposition de f est possible, elle est nécessairement unique et se fait via les fonctions g et h précédemment définies.

• **Synthèse**

Considérons les fonctions g et h définies par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

La fonction g est paire car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$.

De même, la fonction h est impaire car $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x)$.

Par ailleurs, on a sans peine : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) + g(x) = f(x)$ soit $f = g + h$.

• **Conclusion**

Il est ainsi possible de décomposer toute fonction f comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, cette décomposition étant unique d'après l'étape d'analyse.

Remarque

Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il est possible de résoudre les (in)équations dans $\mathbb{R}$ par équivalences successives (mais la manipulation des équivalences va nécessiter un soin tout particulier).

Comme nous l'illustrons ci-après, l'analyse-synthèse va fournir une alternative à cette pratique.

Exemple 9

Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) : $\sqrt{x+8} = x+2$ définie sur $[-8; +\infty[$.

► Méthode 1 : par équivalences successives

- sur $] -\infty; -2[$, $x+2 < 0$ et (E) n'admet pas de solutions.
- sur $[-2; +\infty[$, (E) : $\sqrt{x+8} = x+2 \iff x+8 = (x+2)^2$ (car $x+2 \geq 0$) *
 $\iff x^2 + 3x - 4 = 0$
 $\iff x = 1$ ou $x = -4$ (avec $-4 \notin [-2; +\infty[$) d'où $\mathcal{S} = \{1\}$.

* C'est le point délicat, qui nécessite une disjonction des cas ($x < -2$ ou $x \geq -2$) : pour $A \geq 0$ et $B \in \mathbb{R}$, l'équivalence $A^2 = B^2 \iff A = B$ n'est correcte que pour $B \geq 0$ (car on a en fait : $\forall A, B \in \mathbb{R}, A^2 = B^2 \iff |A| = |B|$).

Méthode 2 : par analyse-synthèse

- en supposant que $x \in [-8; +\infty[$ est solution de (E), on aurait $x+8 = (x+2)^2$ d'où $x^2 + 3x - 4 = 0$ d'où $x = 1$ ou $x = -4$.
- or $\sqrt{1+8} = 1+2$ mais $\sqrt{-4+8} \neq -4+2$ d'où, seule 1 est solution : on retrouve bien $\mathcal{S} = \{1\}$.

VI Exercices

Exercice 1 (avec des entiers)

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^3 - 1$ est divisible par n .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est divisible par 3.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer les équivalences : n pair $\iff n^2$ pair puis n impair $\iff n^2$ impair

Exercice 2 (avec des réels)

1. Soient a et b deux réels positifs avec $a \leq b$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq b$.
2. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \max(x, y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.
3. Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$.
4. Considérant $a \in \mathbb{R}$, montrer que : $(a=0) \iff (\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon)$.

Exercice 3 (avec des suites)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle factorielle n l'entier noté $n!$ défini par : $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

On convient par ailleurs que $0! = 1$.

1. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n!$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (n+1)! - 1$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1, v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = (n+1)(v_n + v_{n+1})$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n-1)! \leq v_n \leq n!$.

Exercice 4 (équations fonctionnelles)

1. On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que : $\forall m, n \in \mathbb{N}, f(m+n) = f(m) + f(n)$.
On propose de raisonner par analyse-synthèse.
 - a. On se donne donc dans le premier temps de l'analyse une fonction f répondant à la question.
 - Déterminer $f(0)$.
 - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1)$.
 - Indiquer la seule forme possible de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 - b. Rédiger la synthèse.
 - c. Conclure.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que : $\forall m, n \in \mathbb{N}, f(m+n) = f(m)f(n)$.
3. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.
Pour f solution, on commencera par s'intéresser à $f(0)$...
4. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x - f(y)) = 1 - x - y$.