

## Exercice 1 - TD1

1 .  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$  ( $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$  ou  $x = -2$ )

- Se donnant  $x \in \mathbb{R}$ , pour que  $x^2 = 4$  il suffit que  $x = 2$   
Se donnant  $x \in \mathbb{R}$ , pour que  $x = 2$  il est nécessaire que  $x^2 = 4$  } (\*)

2 .  $\forall z \in \mathbb{C}, z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$  (pour  $z \in \mathbb{C}, z = \bar{z}$  est une caractérisation de  $z \in \mathbb{R}$ )

- Se donnant  $z \in \mathbb{C}$ , pour que  $z = \bar{z}$  (resp.  $z \in \mathbb{R}$ ) il faut et il suffit que  $z \in \mathbb{R}$  (resp.  $z = \bar{z}$ )

3 .  $\forall x \in \mathbb{R}, x = \pi \Rightarrow e^{2ix} = 1$  ( $e^{2ix} = 1 \Rightarrow x \equiv 0 [\pi]$  ( $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ))

- Se donnant  $x \in \mathbb{R}$ , pour que  $x = \pi$  il est nécessaire que  $e^{2ix} = 1$   
" " " il suffit que  $x = \pi$

4 .  $\forall m \in \mathbb{N}, \langle m \text{ multiple de } 6 \rangle \Rightarrow \langle m \text{ multiple de } 3 \rangle$

Rq: l'implication réciproque est fautive, un multiple de 3 n'est pas forcément un multiple de 6 : c'est le cas de 3

- Se donnant  $m \in \mathbb{N}$ , pour que  $m$  soit multiple de 6 il faut qu'il soit multiple de 3 ; pour qu'il soit multiple de 3 il suffit qu'il soit multiple de 6.

5 . Pour tout quadrilatère  $Q$ ,  $\langle Q \text{ est un carré} \rangle \Rightarrow \langle Q \text{ est un losange} \rangle$

Rq: l'implication réciproque est fautive, il existe des losanges qui ne sont pas des carrés.

- Pour qu'un quadrilatère  $Q$  soit un carré il faut que  $Q$  soit un losange ; pour que ce soit un losange, il suffit que ce soit un carré.

6 . Pour toute fonction  $f$ ,  $\langle f \text{ continue en } 0 \rangle \Leftrightarrow \langle f \text{ dérivable en } 0 \rangle$

Rq: l'implication réciproque est fautive, il existe des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , continues en 0 mais non dérivables en 0 :  
par ex:  $x \mapsto |x|$

- Pour qu'une fonction  $f$  soit continue en 0 il suffit qu'elle soit dérivable en 0 ; pour qu'elle soit dérivable en 0 il faut qu'elle soit continue en 0

Rq: la condition « être dérivable en 0 » est "plus forte" que la condition « être continue en 0 »

(\*) Pour  $x \in \mathbb{R}, x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

On peut également dire que " $x^2 = 4$ " est une condition nécessaire de " $x = 2$ " ou encore, que " $x = 2$ " est une condition suffisante de " $x^2 = 4$ ".

### Exercice 4 - TD1

1  $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P) \text{ et } (\text{non } P \Rightarrow \text{non } Q)$   
 d'où  $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } P \Leftrightarrow \text{non } Q)$

2 Montrons l'équivalence  $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$

On recourt à une table de vérité : 8 cas possibles pour les valeurs du triplet  $(P, Q, R)$

| P | Q | R | Q ou R | P et (Q ou R) | P et Q | P et R | (P et Q) ou (P et R) |
|---|---|---|--------|---------------|--------|--------|----------------------|
| V | V | V | V      | V             | V      | V      | V                    |
| V | V | F | V      | V             | V      | F      | V                    |
| V | F | V | V      | V             | F      | V      | V                    |
| V | F | F | F      | F             | F      | F      | F                    |
| F | V | V | V      | F             | F      | F      | F                    |
| F | V | F | V      | F             | F      | F      | F                    |
| F | F | V | V      | F             | F      | F      | F                    |
| F | F | F | F      | F             | F      | F      | F                    |

↑  
 mêmes valeurs de vérité

On en déduit que  $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$

3 Soient  $P, Q, R$  trois propositions.

On applique 2 aux propositions  $\text{non } P, \text{non } Q, \text{non } R$  :

$$[\text{non } P \text{ et } (\text{non } Q \text{ ou } \text{non } R)] \Leftrightarrow (\text{non } P \text{ et } \text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } P \text{ et } \text{non } R)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{non } (Q \text{ et } R)} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{non } (P \text{ ou } Q)} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{non } (P \text{ ou } R)}$

d'où  $\text{non } [P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow \text{non } [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$

d'où en appliquant 1 :  $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$