

Exercice 2 - TD1

- 1 . $\forall x > 1, x > 2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x > 1 \Rightarrow x > 2)$: FAUSSE (contre exemple : $x=1,2$)
- Négation : $\exists x > 1 \mid x \leq 2$ (VRAIE (du coup) : $x=1,2$ fournit un exemple)
- 2 . $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 \Rightarrow x \leq 2$: VRAIE
- Négation : $\exists x \in \mathbb{R} \mid (x < 1 \text{ et } x > 2)$ (Rq: FAUSSE ! Un réel ne peut à la fois être < 1 et > 2)
- 3 . $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 100 \Leftrightarrow x \geq 10$: FAUSSE
- L'implication $\Leftarrow$ est vraie mais pas l'implication réciproque ($x^2 \geq 100 \Rightarrow x \geq 10$) ($x = -20$ fournit un contre exemple)
- L'équivalence juste serait : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 100 \Leftrightarrow (x \geq 10 \text{ ou } x \leq -10)$
- Négation : il faut récurser l'assertion initiale :
 $\forall x \in \mathbb{R}, ((x^2 \geq 100 \Rightarrow x \geq 10) \text{ et } (x \geq 10 \Rightarrow x^2 \geq 100))$
La négation est donc : $\exists x \in \mathbb{R} \mid [(x^2 \geq 100 \text{ et } x < 10) \text{ ou } (x \geq 10 \text{ et } x^2 < 100)]$
(on a utilisé : $\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et } \text{non} Q$ ainsi que $\text{non}(A \text{ et } B) \Leftrightarrow \text{non} A \text{ ou } \text{non} B$)
- 4 . $\exists m \in \mathbb{N} \mid m^2 - 21m + 110 \leq 0$ (Rq: $m^2 - 21m + 110 = 0 \Leftrightarrow m = 10 \text{ ou } m = 11$)
- L'assertion est VRAIE ($m = 10$ fournit un exemple)
- Négation : $\forall m \in \mathbb{N}, m^2 - 21m + 110 > 0$ (du coup Faux : contre exemple : $m = 10$)
- 5 . $\exists m \in \mathbb{N} \mid m^2 - 21m + 110 < 0$: FAUSSE
- En effet, $m^2 - 21m + 110 \Leftrightarrow m \in]10, 11[$ mais il n'existe aucun entier appartenant à $]10, 11[$.
- Négation : $\forall m \in \mathbb{N}, m^2 - 21m + 110 \geq 0$
- 6 . $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$: FAUSSE
- On exhibe un contre exemple en choisissant $x = -1$ et $y = 1$: on a bien $x < y$ mais $\frac{1}{x} = -1, \frac{1}{y} = 1$ soit $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.
- Négation : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x < y \text{ et } \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y})$
- 7 . $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x < 0 < y \text{ et } x^2 > y^2)$: VRAIE
- En choisissant $x = -2$ et $y = 1$, on a bien : $-2 < 0 < 1$ et $(-2)^2 > (1)^2$
- Négation : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [\text{non}(x < 0 < y) \text{ ou } \text{non}(x^2 > y^2)]$
soit $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [\text{non}(x < 0 < y) \text{ ou } x^2 \leq y^2]$
soit $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [(x < 0 < y) \Rightarrow x^2 \leq y^2]$ (assertion fausse)
Rq: pour prouver $\text{non}(x < 0 < y)$, il faudrait partir de $(x < 0 < y) \Leftrightarrow (x < 0 \text{ et } y > 0)$
- 8 . $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{x} > \sqrt{y} \Rightarrow x > y$: VRAIE
- En effet, par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$ on a l'implication :
 $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{x} > \sqrt{y} \Rightarrow x > y \Rightarrow x > y$
- Négation : $\exists (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid (\sqrt{x} > \sqrt{y} \text{ et } x < y)$