

Exercice 3 - TD1

1+2. $P: \exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$ - non P: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x+y \leq 0$

P est fausse: P s'écrit aussi: $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}, y > -x$, ce qui signifie que $\mathbb{R}$ est minoré (par $-x$), ce qui est manifestement faux

Rq non P est donc vraie et en effet, se donnant $x \in \mathbb{R}$, en posant $y = -x+1$, on a bien $x+y > 0$

• $Q: \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x+y > 0$ - non Q: $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$

Q est vraie (Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $y = -x+1$, on a bien $x+y > 0$ ---)

• $R: \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$

On a aussi: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y > 0$ et non R: $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y \leq 0$

R est fausse: le couple $(-1;0)$ fournit un contre exemple (et $(-1;0)$ est un exemple illustrant que non R est vraie)

• $S: \exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$ - non S: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / y^2 \leq x$

S est vraie: $x = -1$ assure que $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$

Exercice 5 - TD1

1 $\forall x \in I, f(x) \neq 0$: "f ne s'annule pas sur I" ex: $f: x \mapsto e^x$

2 $\exists x \in I / f(x) \neq 0$: "f n'est pas la fonction nulle (sur I)" ex: $f: x \mapsto x^2$

Rq: cette assertion est la négation de: $\forall x \in I, f(x) = 0$ qui signifie, on l'a vu, que f est la fonction nulle sur I.

3 $\exists x \in I, \exists y \in I / f(x) \neq f(y)$: "f n'est pas constante sur I" ex: $f: x \mapsto \cos x + 1$

Rq: cette assertion est la négation de: $\forall (x,y) \in I^2, f(x) = f(y)$ qui signifie effectivement que f est constante sur I.

4 $\forall x \in I, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$: "le seul éventuel antécédent de 0 est 0"

Rq: • f ne s'annule pas forcément sur I! D'ailleurs, si f ne s'annule pas sur I, l'assertion " $f(x) = 0$ " est tout toujours fausse, l'implication est vraie et la proposition universelle donnée est vraie

• un antécédent de 0 s'appelle aussi "zéro" de f

Exemples: $f: x \mapsto x^2$, $f: x \mapsto x^2 + 1$ ---

5 $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I / f(x) = y$: "tout réel admet au moins un antécédent par f" (ou encore, "f prend toute valeur réelle") ex: $f: x \mapsto x^5$ (Rq: f sera dite surjective)

Rq: on dira que l'image de f est $\mathbb{R}$ et on notera: $f(I) = \mathbb{R}$

6 $\forall x \in I, \forall y \in I, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$: "f ne prend jamais la même valeur" ou "tout réel admet au plus un antécédent par f" ex: $f: x \mapsto x^5$

Rq: une telle fonction sera dite injective