

Pratique de la démonstration : Éléments de correction

Exercice 1

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1$
 $= n \underbrace{(n^2 + 3n + 3)}_{\in \mathbb{N}}$ d'où $n \mid (n+1)^3 - 1$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n^3 - 1) - 1$ est divisible par n (Rq: c'est une démonstration directe)

2 On raisonne par dijonction des cas

Un entier n peut s'écrire de 3 façons : $\begin{cases} n = 3k \\ n = 3k+1 \\ n = 3k+2 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ si } n = 3k \ (k \in \mathbb{N}) : n^3 - n = n(n^2 - 1) = 3 \underbrace{[k(n^2 - 1)]}_{\in \mathbb{N}} \\ \bullet \text{ si } n = 3k+1 \ (k \in \mathbb{N}) : n^3 - n = n \underbrace{(n-1)(n+1)}_{= 3k} = 3 \underbrace{[k n(n+1)]}_{\in \mathbb{N}} \\ \bullet \text{ si } n = 3k+2 \ (k \in \mathbb{N}) : n^3 - n = n \underbrace{(n-1)(n+1)}_{= 3(k+1)} = 3 \underbrace{[(k+1)n(n+1)]}_{\in \mathbb{N}} \end{array} \right\} \text{ Dans tous les cas, } 3 \mid n^3 - n$$

Ainsi par dijonction des cas on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3

Rq : $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$: c'est le produit de 3 entiers consécutifs dont l'un est forcément un multiple de 3 d'où $3 \mid n^3 - n$

• on a $3 \mid n^3 - n \Leftrightarrow n^3 - n \equiv 0 [3]$: on peut également construire un tableau de congruences modulo 3 (*) (raisonnement par dijonction des cas)

$n \equiv \dots [3]$	0	1	2
n^3	0	1	$8 \equiv 2$
$-n$	0	-1	-2
$n^3 - n$	0	0	0

} Dans tous les cas, $n^3 - n \equiv 0 [3]$ soit $3 \mid n^3 - n$

(*) La notion de congruence n'est pas au programme de PCSI (c'est dommage...): cette remarque est donc un rappel "culturel" de Terminale.

3 Montrons par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$

On forme l'hypothèse (H) : $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid \sqrt{n^2 + 1} = m$

On aurait alors : $n^2 + 1 = m^2$

d'où $m^2 - n^2 = 1$

d'où $\underbrace{(m-n)}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{(m+n)}_{\in \mathbb{Z}} = 1$ (le produit de 2 entiers vaut -1 si et seulement si c'est le produit -1×1 ou $1 \times (-1)$)

d'où $\begin{cases} m-n = -1 \\ m+n = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} m-n = 1 \\ m+n = -1 \end{cases}$ (or $m, n \in \mathbb{N}$ et il est impossible d'avoir $m+n = -1$)

d'où $\begin{cases} 2n = 0 \\ 2m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ m = 1 \end{cases}$: contradiction avec le fait que $m \in \mathbb{N}^*$

L'hypothèse (H) est donc fautive d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$

4 Montrons par double implication que $\forall n \in \mathbb{N}$, n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair

n pair $\Rightarrow n^2$ pair

On suppose que n est pair : $\exists k \in \mathbb{N} \mid n = 2k$ et $n^2 = 4k^2 = 2 \underbrace{(2k^2)}_{\in \mathbb{N}}$ soit n^2 pair

On a donc l'implication : n pair $\Rightarrow n^2$ pair

n^2 pair $\Rightarrow n$ pair

On montre cette implication par contraposée en montrant que $\text{non}(n \text{ pair}) \Rightarrow \text{non}(n^2 \text{ pair})$ soit n impair $\Rightarrow n^2$ impair

On suppose que n est impair : $\exists k \in \mathbb{N} \mid n = 2k+1$ et alors, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ soit n^2 impair : on a donc n impair $\Rightarrow n^2$ impair soit par contraposée n^2 pair $\Rightarrow n$ pair

En conclusion, on a montré par double implication : n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair

• On a déjà montré que n impair $\Rightarrow n^2$ impair. Par ailleurs, comme n pair $\Rightarrow n^2$ pair, on a par contraposée n^2 impair $\Rightarrow n$ impair et finalement, n impair $\Leftrightarrow n^2$ impair