

## Raisonnement et vocabulaire ensembliste

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### Rudiments de logique

Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.

#### Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$ , $\bar{A}$ et $A^c$ pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathcal{P}(E)$ .
Recouvrement disjoint, partition.	

#### Applications

Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de $E$ dans $F$ associe à tout élément de $E$ un unique élément de $F$ . Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et $F^E$ .
Famille d'éléments d'un ensemble. Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. Restriction et prolongement. Image directe. Image réciproque.	Notation $\mathbb{1}_A$ . Notation $f _A$ . Notation $f(A)$ . Notation $f^{-1}(B)$ . Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections. Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation $f^{-1}$ . Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

## Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i \in I} a_i$ , $\sum_{i=1}^n a_i$ , $\prod_{i \in I} a_i$ , $\prod_{i=1}^n a_i$ . Cas où $I$ est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.

Expressions simplifiées de  $\sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2$ ,  $\sum_{k=0}^n x^k$ .

Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$ .

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.

Formule du binôme dans  $\mathbb{R}$ .

Exemples de sommes triangulaires.

Convention  $\binom{n}{k} = 0$  pour  $k < 0$  et  $k > n$ .

### Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.

Interprétation géométrique : intersection de droites dans  $\mathbb{R}^2$ , de plans dans  $\mathbb{R}^3$ .

Notations  $L_i \leftrightarrow L_j$ ,  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  ( $\lambda \neq 0$ ),  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ .

### Inégalités

Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Compatibilité avec les opérations. Intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.

Dans  $\mathbb{R}$ , parties majorées, minorées, bornées.

Majorant, minorant ; maximum, minimum.

Partie entière d'un nombre réel.

Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.

Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type  $|x - a| \leq b$ .

Notation  $\lfloor x \rfloor$ .

### Trigonométrie

Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.

Relation de congruence modulo  $2\pi$  sur  $\mathbb{R}$ .

Cosinus et sinus de  $\pi \pm x$ , de  $\frac{\pi}{2} \pm x$ .

Cosinus et sinus des angles usuels.

Formules d'addition  $\cos(a \pm b)$ ,  $\sin(a \pm b)$ . Cas particulier des formules de duplication :  $\cos(2a)$ ,  $\sin(2a)$ .

Fonctions circulaires cosinus et sinus.

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , inégalité  $|\sin(x)| \leq |x|$ .

Fonction tangente.

Tangente de  $\pi \pm x$ . Tangente des angles usuels.

Formule d'addition  $\tan(a \pm b)$ .

Notation  $a \equiv b [2\pi]$ .

Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.

On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant  $\cos(a)\cos(b)$ ,  $\cos(a)\sin(b)$ ,  $\sin(a)\sin(b)$ .

On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.

Notation  $\tan$ . Dérivée, variations, représentation graphique.

Interprétation sur le cercle trigonométrique.

### Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Raisonnement par récurrence simple (à partir de l'axiome : « toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément »)
  - ▷ Formule du binôme
  - ▷ La composée de deux applications injectives est injective
  - ▷ La composée de deux applications surjectives est surjective
  - ▷ Si  $g \circ f$  est surjective alors,  $g$  est surjective
  - ▷ Si  $g \circ f$  est injective alors,  $f$  est injective
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

## **Prochain programme**

Ensemble, applications & Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles.