Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.
Dérivation	
Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	
Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Inégalités $\exp(x) \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch.	Dérivée, variations, représentation graphique. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

Nombres complexes

Contenus	Capacités & commentaires
Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\|z\|^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\|z - z'\|$, cercles et disques.
Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	Notation $\mathbb{U}$.
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▹ La fonction exp (qui a été définie comme l'unique solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et vérifie
  $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$
  - ▹ Variation et limites de exp (qui a été définie comme l'unique solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$)
  - ▹ Dérivée de la fonction arcsin (dont le calcul de $\cos \circ \arcsin$).
  - ▹ Dérivée de la fonction arccos (dont le calcul de $\sin \circ \arccos$).
  - ▹ Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
  - ▹ Formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$ pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Fin du chapitre sur les fonctions usuelles et tout le chapitre sur les nombres complexes.