Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle. Inégalités $\exp(x) \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch.	Dérivée, variations, représentation graphique. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

Nombres complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$.	Notation $\mathbb{U}$.
Exponentielle d'une somme.	
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$.	
Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z-a$. Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.
Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.
Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique des module et arguments de $\dfrac{c-a}{b-a}$. Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z+b$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Interprétation géométrique de la conjugaison.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité. Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations. L'étude générale des similitudes est hors programme.
Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle	
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient. Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire. Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Dérivée de la fonction arcsin (dont le calcul de $\cos\circ\arcsin$).
  - ▷ Dérivée de la fonction arccos (dont le calcul de $\sin\circ\arccos$).
  - ▷ Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n}\sin(kt)$ pour $t\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.
  - ▷ Formules donnant $\cos(p)\pm\cos(q)$ et $\sin(p)\pm\sin(q)$ pour $(p,q)\in\mathbb{R}^2$.
  - ▷ Pour P fonction polynomiale admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z-a$.
  - ▷ Connaissant les racines n-ièmes de l'unité, description de l'ensemble des racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul (où $n\in\mathbb{N}^*$).
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Fin du chapitre sur les nombres complexes et chapitre sur les primitives d'une fonction de la variable réelle.