

Nombres complexes

CONTENUS CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Nombres complexes

Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	La construction de \mathbb{C} est hors programme. On identifie \mathbb{C} au plan usuel muni d'un repère ortho-normé direct (« plan complexe »).
--	---

Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $ z ^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $ z - z' $, cercles et disques.
---	--

Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme. Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.	Notation \mathbb{U} . Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.
Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.

Équations algébriques

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$. Résolution des équations du second degré dans \mathbb{C} . Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
--	--

Racines n -ièmes

Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation \mathbb{U}_n . Représentation géométrique.
---	--

Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans \mathbb{C} , $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.	Notations $\exp(z)$, e^z . Module et arguments de e^z .
---	--

Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.
 Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z+b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
 Interprétation géométrique de la conjugaison.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations.
 L'étude générale des similitudes est hors programme.

Primitives d'une fonction de la variable réelle

Primitives d'une fonction de la variable réelle

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f , $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ a pour dérivée f .

On pourra noter $\int_{x_0}^x f(t) dt$ une primitive générique de f .

Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.

Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

Intégration par parties, changement de variable.

Questions de cours possibles

– La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :

▷ Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

▷ Pour P fonction polynomiale admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z-a$.

▷ Connaissant les racines n -ièmes de l'unité, description de l'ensemble des racines n -ièmes d'un nombre complexe non nul (où $n \in \mathbb{N}^*$).

▷ Formule d'intégration par parties.

▷ Formule de changement de variables.

– Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Primitives d'une fonction de la variable réelle; équations différentielles et arithmétique.