

## CONTENUS

## CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

**Équations différentielles linéaires du premier ordre**

Équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Ensemble des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Méthode de la variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation homogène associée.

Cas particulier où la fonction  $a$  est constante.**Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants**

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où  $a$  et  $b$  sont des scalaires et  $f$  est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.

Ensemble des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation homogène associée.

Si  $a$  et  $b$  sont réels, description des solutions réelles.

Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme  $x \mapsto Ae^{\lambda x}$  avec  $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$ ,  $x \mapsto B \cos(\omega x)$  et  $x \mapsto B \sin(\omega x)$  avec  $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$ .

La démonstration de ce résultat est hors programme.

**Arithmétique**Divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ , diviseurs, multiples.

Théorème de la division euclidienne.

PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.

PPCM.

Algorithme d'Euclide.

Nombre premier.

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.

Le PGCD de  $a$  et  $b$  est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans  $\mathbb{Z}$ ) de l'ensemble des diviseurs communs à  $a$  et  $b$ .

La démonstration est hors programme.

Application au calcul du PGCD et du PPCM.

**Nombres réels et suites numériques****Propriété de la borne supérieure**Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de  $\mathbb{R}$ .Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure (resp. inférieure).Notations  $\sup X$ ,  $\inf X$ .On convient que  $\sup X = +\infty$  si  $X$  est non majorée.

Une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si et seulement si pour tous  $a, b \in X$  tels que  $a \leq b$ ,  $[a, b] \subset X$ .

---

### Généralités sur les suites réelles

---

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.  
Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

---

### Limite d'une suite réelle

---

Limite finie ou infinie d'une suite.  
Unicité de la limite.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.  
Notations  $u_n \longrightarrow \ell$ ,  $\lim u_n$ .

Suite convergente, divergente.  
Toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.

Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

Passage à la limite d'une inégalité large.

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell > 0$ , alors  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang.

Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite  $+\infty$ ), par majoration (limite  $-\infty$ ).

Utilisation d'une majoration de la forme  $|u_n - \ell| \leq v_n$ , où  $(v_n)$  converge vers 0.

---



**Attention!** Les congruences en Arithmétique ne sont pas dans l'esprit du programme. Le lemme de GAUSS et le théorème de BÉZOUT ne sont pas au programme mais ont été vus et prouvés en cours.

### Questions de cours possibles

– La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :

- ▷ Ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$y' + a(x)y = 0$$

où  $a$  est une fonction réelle ou complexe définie et continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- ▷ Description de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- ▷ L'ensemble des nombres premiers est infini.
- ▷ Tout nombre entier différent de 1 et  $-1$  admet au moins un diviseur premier.
- ▷ Une suite réelle convergente est bornée.
- ▷ Le produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0 converge vers 0.

– Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

### Prochain programme

Nombres réels et les suites.

---