

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Nombres réels et suites numériques**Propriété de la borne supérieure**

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de \mathbb{R} .
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} admet une borne supérieure (resp. inférieure).
Une partie X de \mathbb{R} est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.

Notations $\sup X, \inf X$.
On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.

Généralités sur les suites réelles

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.
Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite.
Unicité de la limite.
Suite convergente, divergente.
Toute suite convergente est bornée.
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.
Passage à la limite d'une inégalité large.
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Notations $u_n \rightarrow \ell, \lim u_n$.

Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

Utilisation d'une majoration de la forme $|u_n - \ell| \leq v_n$, où (v_n) converge vers 0.

Suites monotones

Théorème de la limite monotone.
Théorème des suites adjacentes.
Approximations décimales d'un réel.

Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Suites extraites

Suite extraite.
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.
Utilisation pour montrer la divergence d'une suite.
Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ , alors (u_n) tend vers ℓ .
Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.

Suites complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

Suites particulières

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.

Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$ (*démonstration admise pour l'instant*).

Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n) , on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f .

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Une suite réelle convergente est bornée.
 - ▷ Le produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0 converge vers 0.
 - ▷ Théorème des suites adjacentes.
 - ▷ Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ , alors (u_n) tend vers ℓ .
 - ▷ Formule donnant le terme général d'une suite arithmético-géométrique.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Fin du cours sur les suites à valeurs réelles ou complexes et début du cours sur les notions de limite et de continuité d'une fonction.
