

## CONTENUS

## CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

**Nombres réels et suites numériques****Propriété de la borne supérieure**

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de  $\mathbb{R}$ .  
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure (resp. inférieure).  
Une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si et seulement si pour tous  $a, b \in X$  tels que  $a \leq b$ ,  $[a, b] \subset X$ .

Notations  $\sup X, \inf X$ .  
On convient que  $\sup X = +\infty$  si  $X$  est non majorée.

**Généralités sur les suites réelles**

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.  
Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

**Limite d'une suite réelle**

Limite finie ou infinie d'une suite.  
Unicité de la limite.  
Suite convergente, divergente.  
Toute suite convergente est bornée.  
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.  
Passage à la limite d'une inégalité large.  
Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell > 0$ , alors  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang.  
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite  $+\infty$ ), par majoration (limite  $-\infty$ ).

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.  
Notations  $u_n \rightarrow \ell, \lim u_n$ .

Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

Utilisation d'une majoration de la forme  $|u_n - \ell| \leq v_n$ , où  $(v_n)$  converge vers 0.

**Suites monotones**

Théorème de la limite monotone.  
Théorème des suites adjacentes.  
Approximations décimales d'un réel.

Valeurs décimales approchées à la précision  $10^{-n}$  par défaut et par excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

**Suites extraites**

Suite extraite.  
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.  
Utilisation pour montrer la divergence d'une suite.  
Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  tendent vers  $\ell$ , alors  $(u_n)$  tend vers  $\ell$ .  
Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.

**Suites complexes**

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

**Suites particulières**

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

Pour une relation de récurrence  $u_{n+1} = au_n + b$  où  $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  et  $b \in \mathbb{C}$ , recherche d'une solution constante, détermination des solutions.

Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si  $(u_n)$  converge vers un élément  $\ell$  en lequel  $f$  est continue, alors  $f(\ell) = \ell$  (*démonstration admise pour l'instant*).

Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de  $(u_n)$ , on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de  $f(x) - x$ , et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de  $f$ .

## Limites et continuité

### Limite d'une fonction en un point

Étant donné  $a$  fini ou infini appartenant à  $I$  ou extrémité de  $I$ , limite finie ou infinie d'une fonction en  $a$ .

Unicité de la limite.

Si  $f$  est définie en  $a$  et possède une limite en  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Si  $f$  possède une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

Limite à droite, limite à gauche.

Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Passage à la limite d'une inégalité large.

Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite  $+\infty$ ), par majoration (limite  $-\infty$ ).

Théorème de la limite monotone.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Notations  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Notations  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

## Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Une suite réelle convergente est bornée.
  - ▷ Le produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0 converge vers 0.
  - ▷ Théorème des suites adjacentes.
  - ▷ Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  tendent vers  $\ell$ , alors  $(u_n)$  tend vers  $\ell$ .
  - ▷ Formule donnant le terme général d'une suite arithmético-géométrique.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

## Prochain programme

Limite et de continuité d'une fonction et début du cours sur le calcul matriciel.