

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Limites et continuité**Limite d'une fonction en un point**

Étant donné a fini ou infini appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a .

Unicité de la limite.

Si f est définie en a et possède une limite en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si f possède une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Limite à droite, limite à gauche.

Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Passage à la limite d'une inégalité large.

Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).

Théorème de la limite monotone.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Notations $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Continuité en un point

Continuité, prolongement par continuité en un point.

La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

Continuité à gauche, à droite.

Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.

Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Image d'un segment par une fonction continue.

Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.

Principe de démonstration par dichotomie.

La démonstration est hors programme.

La démonstration n'est pas exigible.

Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.

Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Opérations sur les matrices

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.
Matrices élémentaires.

Produit matriciel; bilinéarité, associativité.

Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Transposée d'une matrice.

Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.

Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .

Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.

Notation A^T .

Opérations élémentaires

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.

Systèmes linéaires

Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.
Système compatible.

Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A .

On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

Ensemble des matrices carrées

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Matrice identité, matrice scalaire.

Matrices symétriques, antisymétriques.

Formule du binôme.

Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.

Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.

Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.

Notation I_n .

Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Application au calcul de puissances.

Notation $\text{GL}_n(\mathbb{K})$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Inverse d'une transposée.

Inverse d'un produit de matrices inversibles.

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.

Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

L'inversibilité à droite (resp. à gauche) implique l'inversibilité

Lien entre inversibilité et solution de $AX = 0$

Toute technicité est exclue.

Cas particulier des matrices diagonales.

Admis à ce stade

Admis à ce stade

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Si une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (avec I intervalle contenant au moins deux points) admet une limite ℓ en $a \in I$, alors $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell = f(a)$.
 - ▷ Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (avec I intervalle contenant au moins deux points) est continue en $a \in I$ si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a .
 - ▷ Image d'un intervalle par une fonction continue.
 - ▷ Produit de deux matrices élémentaires.
 - ▷ Transposée d'un produit de deux matrices.
 - ▷ Le produit de deux matrices carrées triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Calcul matriciel et dérivation.