

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

**Calcul matriciel et systèmes linéaires**

**Systèmes linéaires**

Écriture matricielle  $AX = B$  d'un système linéaire. Système homogène associé.

Système compatible.

Les solutions du système compatible  $AX = B$  sont les  $X_0 + Y$ , où  $X_0$  est une solution particulière et où  $Y$  parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Le système  $AX = B$  est compatible si  $B$  est combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .

On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

**Ensemble des matrices carrées**

Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.

Inverse d'une transposée.

Inverse d'un produit de matrices inversibles.

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système  $AX = Y$ .

Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

L'inversibilité à droite (resp. à gauche) implique l'inversibilité

Lien entre inversibilité et solution de  $AX = 0$

Notation  $GL_n(\mathbb{K})$ . On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Toute technicité est exclue.

Cas particulier des matrices diagonales.

*Admis à ce stade*

*Admis à ce stade*

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

**Dérivabilité des fonctions de la variable réelle**

**Nombre dérivé, fonction dérivée**

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.

La dérivabilité entraîne la continuité.

Dérivabilité à gauche, à droite.

Définition par le taux d'accroissement.

Caractérisation : une fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$ . Dans ce cas

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Interprétation géométrique : tangente.

Interprétation cinématique : vitesse instantanée.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.

Tangente au graphe d'une fonction réciproque.

**Extremum local et point critique**

Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

**Théorèmes de Rolle et des accroissements finis**

Théorème de Rolle.

Égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis : si  $f$  est dérivable et si  $|f'|$  est majorée par  $K$ , alors  $f$  est  $K$ -lipschitzienne.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite de la dérivée : si  $f$  est continue sur  $I$ , dérivable sur  $I \setminus \{a\}$  et si  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ , alors

$f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$ .

Extension au cas où  $\ell = \pm\infty$ .

Interprétations géométrique et cinématique.

La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion.

Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

La fonction  $f'$  est alors continue en  $a$ .

**Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$** 

Pour  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

**Fonctions convexes**

La fonction  $f$  est convexe sur  $I$  si, pour tous  $(x, y) \in I^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ .

Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.

Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

Interprétation géométrique.

L'inégalité de Jensen et les développements généraux sur les barycentres sont hors programme.

Exemples d'inégalités de convexité.

**Fonctions complexes**

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.

On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

**Questions de cours possibles**

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.
  - ▷ Théorème de ROLLE
  - ▷ Caractérisation de la monotonie des fonctions continue sur un intervalle  $I$  et dérivable à l'intérieure de  $I$ .
  - ▷ Théorème de la limite de la dérivée.
  - ▷ Lemme des trois cordes.
  - ▷ Pour une fonction  $f$  convexe et dérivable sur un intervalle  $I$ , le graphe de  $f$  est au-dessus de ses tangentes.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

**Prochain programme**

Dérivation et début du chapitre sur les polynômes