

## CONTENUS

## CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

**Espaces vectoriels**

Structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.  
 Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.  
 Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

Espaces  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .  
 Espace  $\mathbb{K}^\Omega$ , cas particulier  $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ .

**Sous-espaces vectoriels**

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.  
  
 Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.  
 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.

Sous-espace nul. Droite vectorielle.  
 Plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .  
 Sous-espace  $\mathbb{K}_n[X]$  de  $\mathbb{K}[X]$ .  
  
 Notation  $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ .  
 Tout sous-espace vectoriel contenant les  $x_i$  contient  $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ .

**Familles finies de vecteurs**

Famille génératrice.  
 Famille libre, liée.  
  
 Base, coordonnées.

Ajout d'un vecteur à une famille libre.  
 Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.

**Somme de deux sous-espaces**

Somme de deux sous-espaces.  
 Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.  
  
 Sous-espaces supplémentaires.

La somme  $F + G$  est directe si la décomposition de tout vecteur de  $F + G$  comme somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$  est unique.  
 On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

## CONTENUS

## CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

**Applications linéaires : Généralités**

Application linéaire.  
 Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.  
  
 Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.  
 Image d'une application linéaire.  
 Noyau d'une application linéaire.  
 Si  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille finie génératrice de  $E$  et si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$ .

Espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .  
 Bilinéarité de la composition.

Notation  $\text{Im } u$ .  
 Notation  $\text{Ker } u$ . Caractérisation de l'injectivité.

**Endomorphismes**

Identité, homothéties.  
 Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.  
 Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par  $p^2 = p$ , par  $s^2 = \text{id}$ .

Notations  $\text{id}_E$ ,  $\text{id}$ .  
 Notation  $u^k$  pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Automorphismes. Groupe linéaire.

Notation  $GL(E)$ . On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Notation  $u^k$  pour  $u \in GL(E)$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont des sous-espaces de  $E$  tels que  $E = E_1 \oplus E_2$ , si  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ ,  $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ , il existe une unique application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  coïncidant avec  $u_1$  sur  $E_1$  et avec  $u_2$  sur  $E_2$ .

---

## Équations linéaires

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme  $u(x) = a$  où  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $a \in F$ . L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme  $x_0 + \text{Ker } u$ .

Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.

---

## Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire.

Hyperplan.

Si  $H$  est un hyperplan de  $E$  et  $D$  une droite non contenue dans  $H$ , alors  $E = H \oplus D$ .

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

---

## Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Caractérisation des sous-espaces vectoriels.
  - ▷ L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
  - ▷ Caractérisation d'une somme directe.
  - ▷ Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire.
  - ▷ Espaces caractéristiques d'un projecteur.
  - ▷ Toute sous-famille (finie) d'une famille (finie) libre est libre.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

## Prochain programme

Espaces vectoriels et applications linéaires.

---