

CONTENUS CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Espaces vectoriels

Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.	Espaces \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace \mathbb{K}^Ω , cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	

Sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de \mathbb{R}^3 . Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

Familles finies de vecteurs

Famille génératrice.	
Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	

Somme de deux sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

CONTENUS CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Applications linéaires : Généralités

Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F . Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\text{Im } u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\text{Ker } u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$.	

Endomorphismes

Identité, homothéties.	Notations id_E , id .
Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.	Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Automorphismes. Groupe linéaire.

Notation $GL(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Notation u^k pour $u \in GL(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .

Équations linéaires

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \text{Ker } u$.

Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.

Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire.

Hyperplan.

Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Caractérisation des sous-espaces vectoriels.
 - ▷ L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E un \mathbb{K} -espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de E .
 - ▷ Caractérisation d'une somme directe.
 - ▷ Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire.
 - ▷ Espaces caractéristiques d'un projecteur.
 - ▷ Toute sous-famille (finie) d'une famille (finie) libre est libre.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Espaces vectoriels et applications linéaires.