

## CONTENUS CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

**Espaces vectoriels**

Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$ , $\mathbb{K}[X]$ , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$ , cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	

**Sous-espaces vectoriels**

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ . Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$ .
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ . Tout sous-espace vectoriel contenant les $x_i$ contient $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ .

**Familles finies de vecteurs**

Famille génératrice.	
Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	

**Somme de deux sous-espaces**

Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$ est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

## CONTENUS CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

**Applications linéaires : Généralités**

Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de $E$ dans $F$ . Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\text{Im } u$ .
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\text{Ker } u$ . Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie génératrice de $E$ et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$ .	

**Endomorphismes**

Identité, homothéties.	Notations $\text{id}_E$ , $\text{id}$ .
Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.	Notation $u^k$ pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$ .
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$ , par $s^2 = \text{id}$ .	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.

Automorphismes. Groupe linéaire.

Notation  $GL(E)$ . On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Notation  $u^k$  pour  $u \in GL(E)$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont des sous-espaces de  $E$  tels que  $E = E_1 \oplus E_2$ , si  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ ,  $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ , il existe une unique application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  coïncidant avec  $u_1$  sur  $E_1$  et avec  $u_2$  sur  $E_2$ .

### Équations linéaires

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme  $u(x) = a$  où  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $a \in F$ . L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme  $x_0 + \text{Ker } u$ .

Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.

### Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire.

Hyperplan.

Si  $H$  est un hyperplan de  $E$  et  $D$  une droite non contenue dans  $H$ , alors  $E = H \oplus D$ .

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

### Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Caractérisation des sous-espaces vectoriels.
  - ▷ L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
  - ▷ Caractérisation d'une somme directe.
  - ▷ Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire.
  - ▷ Espaces caractéristiques d'un projecteur.
  - ▷ Toute sous-famille (finie) d'une famille (finie) libre est libre.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

### Prochain programme

Espaces vectoriels et applications linéaires.