Espaces vectoriels et applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
Familles finies de vecteurs	
Famille génératrice.	
Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	
Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Applications linéaires : Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\mathrm{Im}\, u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\mathrm{Ker}\, u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\,(u(x_i))_{i\in I}$.	
Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.	Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
Équations linéaires	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.
Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire.	
Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	

Intégration sur un segment

Contenus	Capacités & commentaires
Fonctions en escalier	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$. *La construction de l'intégrale n'est pas un attendu du programme, elle a été faite en admettant un résultat d'approximation des fonctions continues sur un segment par des fonctions en escalier.*
Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\lvert \displaystyle\int_{[a,b]} f \right\rvert \leqslant \displaystyle\int_{[a,b]} \lvert f \rvert$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.

Contenus	Capacités & Commentaires
Sommes de Riemann	
Pour f continue sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est lipschitzienne.
Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
Inégalité de Taylor-Lagrange	
Inégalité de Taylor-Lagrange.	La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).
Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$. Linéarité, majoration du module de l'intégrale. Inégalité de Taylor-Lagrange.	Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de E.
  - ▷ Espaces caractéristiques d'un projecteur.
  - ▷ Toute sous-famille (finie) d'une famille (finie) libre est libre.
  - ▷ Une fonction continue de signe constant sur $[a,b]$ (avec a et b des réels tels que $a<b$) est nulle si et seulement si $\int_a^b f = 0$.
  - ▷ Inégalité triangulaire pour les intégrales de fonctions à valeurs complexes.
  - ▷ Formule de Taylor avec reste intégral.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Intégration sur un segment et dimension finie.