

Intégration sur un segment

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Fonctions en escalier

Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.
Fonction en escalier.
Intégrale d'une fonction en escalier.

Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
La construction de l'intégrale n'est pas un attendu du programme, elle a été faite en admettant un résultat d'approximation des fonctions continues sur un segment par des fonctions en escalier.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Inégalité triangulaire intégrale : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Relation de Chasles.

Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.

Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.

Interprétation géométrique de l'intégrale.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Extension de la notation $\int_a^b f(t) dt$ au cas où $b \leq a$.
Propriétés correspondantes.

Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.

Sommes de Riemann

Pour f continue sur le segment $[a, b]$,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Interprétation géométrique.

La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est lipschitzienne.

Lien entre intégrale et primitive

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

Inégalité de Taylor-Lagrange

Inégalité de Taylor-Lagrange.

La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).

Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Linéarité, majoration du module de l'intégrale.

Inégalité de Taylor-Lagrange.

Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Espaces vectoriels en dimension finie

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E .

Existence de bases en dimension finie.

Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Dimension d'un espace de dimension finie.

Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$;

Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

Notation $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.

Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.

Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

Applications linéaires en dimension finie

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Rang d'une application linéaire

Application linéaire de rang fini.

Notation $\text{rg}(u)$.

Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u .

Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.

Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie.

La démonstration sera traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$.

Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $n = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$.

Hyperplans en dimension finie

Caractérisation des hyperplans en dimension finie

Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Une fonction continue de signe constant sur $[a, b]$ (avec a et b des réels tels que $a < b$) est nulle si et seulement si $\int_a^b f = 0$.
 - ▷ Formule de TAYLOR avec reste intégral.
 - ▷ Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.
 - ▷ Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie : inégalité et cas d'égalité.
 - ▷ Lien entre le rang de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et les dimensions de E et de F .
 - ▷ Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Dimension finie.