

Espaces vectoriels en dimension finie

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E .

Existence de bases en dimension finie.

Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Dimension d'un espace de dimension finie.

Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$;

Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Notation $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.

Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.

Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

Applications linéaires en dimension finie

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Rang d'une application linéaire

Application linéaire de rang fini.

Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

Notation $\text{rg}(u)$.

Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.

Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie.

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u .

La démonstration sera traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$.

Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $n = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$.

Hyperplans en dimension finie

Caractérisation des hyperplans en dimension finie

Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.
 - ▷ Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie : inégalité et cas d'égalité.
 - ▷ Base adaptée à une décomposition de E en somme de deux sous-espaces supplémentaires.
 - ▷ Lien entre le rang de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et les dimensions de E et de F .
 - ▷ Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Séries numériques.
