

Séries numériques

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Convergence et divergence

Sommes partielles d'une série numérique.
Convergence, divergence, somme.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Reste d'une série convergente.

Lien suite-série.

Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.

Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

La série est notée $\sum u_n$.

En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Divergence grossière.

La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

Séries à termes positifs ou nuls

Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n , la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.

Séries de Riemann.

Convergence des séries alternés

On note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge.

Application à l'étude de sommes partielles.

Ce résultat n'est pas au programme officiel de la classe de PCSI – L'encadrement du reste n'a pas été vu.

Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables

Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$, encore appelée sommabilité de la suite (u_n) .

Une série numérique absolument convergente est convergente.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Critère de d'Alembert

Notation $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.

Somme d'une suite sommable.

Ce résultat n'est pas au programme officiel de la classe de PCSI

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.
 - ▷ Nature des séries de RIEMANN
 - ▷ Critère d'équivalence de séries à termes positifs
 - ▷ La convergence absolue d'une série implique la convergence.
 - ▷ Théorème des séries alternés (l'encadrement du reste et son signe n'ont pas été prouvés).
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Séries numériques; Matrices et algèbre linéaire.