Séries numériques

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Reste d'une série convergente. Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme. Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	
Séries à termes positifs ou nuls	
Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.	On note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge.
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Séries de Riemann.	Application à l'étude de sommes partielles.
Convergence des séries alternés	*Ce résultat n'est pas au programme officiel de la classe de PCSI – L'encadrement du reste n'a pas été vu.*
Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables	
Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$, encore appelée sommabilité de la suite (u_n).	Notation $\sum_{n=0}^{+\infty} \lvert u_n\rvert < +\infty$. Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.
Une série numérique absolument convergente est convergente. Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	Somme d'une suite sommable.
Critère de d'Alembert	*Ce résultat n'est pas au programme officiel de la classe de PCSI*

Matrices et applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.
Isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes. Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.
Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
Invariance du rang par transposition.	Ce résultat est admis.
Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d' une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
Matrices semblables.	Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▹ Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.
  - ▹ Critère d'équivalence de séries à termes positifs
  - ▹ La convergence absolue d'une série implique la convergence.
  - ▹ Coordonnées d'un vecteur $u(\vec{x})$ dans une base $\mathscr{B}'$ en fonction des coordonnées de $\vec{x}$ dans une base $\mathscr{B}$ et de la matrice dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de l'application linéaire u.
  - ▹ Inverse d'une matrice de passage.
  - ▹ Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à gauche si et seulement si elle est inversible à droite.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Matrices et algèbre linéaire ; dénombrement.