

Matrices et applications linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.

Isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.

Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.

Cas particulier des endomorphismes.
Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Noyau, image et rang d'une matrice.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace \mathbb{K}^n ou si et seulement si son rang est n .

Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

Invariance du rang par transposition.

On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}^n .

Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.

Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Lien entre les diverses notions de rang.

Application : calcul du rang.

Ce résultat est admis.

Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une autre.

Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.

Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.

Matrices semblables.

Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

Systèmes linéaires

Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.

Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A .

Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.

Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Dénombrement

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini.

Notations $|A|$, $\text{Card}(A)$.

Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

La formule du crible est hors programme.

Listes et combinaisons

Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n .

Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n .

Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n .

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Coordonnées d'un vecteur $u(\vec{x})$ dans une base \mathcal{B}' en fonction des coordonnées de \vec{x} dans une base \mathcal{B} et de la matrice dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de l'application linéaire u .
 - ▷ Inverse d'une matrice de passage.
 - ▷ Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à gauche si et seulement si elle est inversible à droite.
 - ▷ Cardinal d'une union disjointe de deux ensembles finis.
 - ▷ Nombre de p -arrangements d'un ensemble fini à n éléments.
 - ▷ Démonstration combinatoire de la formule de PASCAL.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Dénombrement; Déterminants.
