

Probabilités sur un univers fini

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Univers, événements	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini. Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de \mathbb{R}^+ indexée par E et de somme 1. Probabilité uniforme. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	Espace probabilisé fini (Ω, P) . Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$. La formule du crible est hors programme.
Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité. Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Famille finie d'événements indépendants. Si A et B sont indépendants, A et \bar{B} le sont aussi.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A B) = P(A)$. L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance. Extension au cas de n événements.

Espaces préhilbertiens réels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n . Produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.	Notations $\langle x, y \rangle, (x y), x \cdot y$. Expression $X^T Y$. Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Identité remarquable $\ x + y\ ^2 = \ x\ ^2 + \ y\ ^2 + 2\langle x, y \rangle$.	Exemples : sommes finies, intégrales. Formule de polarisation associée.

Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.

Notation X^\perp .

L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.

Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale).

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème de Pythagore.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Bases orthonormées

Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète.

Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F . Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F .

En dimension finie : dimension de F^\perp , vecteur normal à un hyperplan.

Distance d'un vecteur à F .

Notation $d(x, F)$.

Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F .

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Probabilité d'une union de deux événements.
 - ▷ Une probabilité conditionnelle est une probabilité.
 - ▷ Caractérisation de l'indépendance à l'aide des probabilités conditionnelles.
 - ▷ Inégalité (et cas d'égalité dans l'inégalité) de CAUCHY-SCHWARZ
 - ▷ Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
 - ▷ Expression du projeté orthogonal sur F à l'aide d'une base orthonormée de F .
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Espaces préhilbertiens réels; variables aléatoires.
