Variables aléatoires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Définition et notations	
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$, $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Loi d'une variable aléatoire	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
Variables aléatoires indépendantes	
Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $P\big((X,Y) = (x,y)\big) = P(X = x)P(Y = y)$.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	La démonstration est hors programme. Extension au cas de plus de deux coalitions.
Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe	
Espérance $\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ d'une variable aléatoire X.	L'espérance est un indicateur de position. Formule $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	
Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.	Exemple : $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
Formule de transfert : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$.	On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.
Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance	
Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.

Contenus	Capacités & Commentaires
Relation $V(aX+b) = a^2V(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.	
Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	On retrouve la variance d'une variable binomiale.
Inégalités probabilistes	
Inégalité de Markov.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.

Fonctions de deux variables

⚠ Le TD sur les fonctions de deux variables n'ayant pas encore été commencé, on se contentera d'exercices très proches du cours.

Contenus	Capacités & commentaires
Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues	
Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique.	
Ouverts.	
Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface. La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.
Dérivées partielles	
Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.	Définition par la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.
Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0,y_0) d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$: $$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\|(h,k)\|).$$	Démonstration hors programme. On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)$ et l'interprétation de $$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$ comme équation du plan tangent en (x_0,y_0) à la surface d'équation $z = f(x,y)$.
Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Notation $\nabla f(x_0,y_0)$.
Expression du développement limité à l'aide du gradient.	Le gradient de f en (x_0,y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivées partielles et composées	
Dérivée selon un vecteur. Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(x(t), y(t))\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$	Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(x_0, y_0), u\rangle$. Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et expression à l'aide du gradient $$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$ où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$. Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.
Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.	
Extremums	
Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$. Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.	Exemples d'étude de points critiques.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Loi d'une somme de $n \in \mathbb{N}^*$ variables aléatoires indépendantes de même loi de BERNOULLI de paramètre $p \in [0, 1]$.
  - ▷ Espérance d'une variable aléatoire suivant un loi binomiale.
  - ▷ Inégalité de MARKOV.
  - ▷ Soit f une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si f est continue en $(a, b) \in U$, alors les applications partielles de f sont continues en a et b respectivement.
  - ▷ Expression de la dérivée selon un vecteur en un point à l'aide du gradient pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.
  - ▷ Pour une fonction $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert, si f admet un extremum local en un point, ce point est un point critique de f.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Fin des colles