



Chapitre 2

Études des fonctions et fonctions usuelles

Objectifs :

- Faire le point en début de PCSI sur l'étude des fonctions à valeurs réelles en adoptant un vocabulaire précis et rigoureux.
- Revoir les notions de la classe de Terminale ainsi que de nouveaux résultats nécessaires à l'étude complète d'une fonction sans pour autant démontrer tous les résultats. Ceux-ci le seront dans des chapitres ultérieurs (limites, continuité, dérivabilité, etc).
- Étudier les fonctions usuelles dont les propriétés doivent être maîtrisées.



Attention : utiliser un lecteur de PDF adapté

Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de PDF capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1	Généralités sur les fonctions	2
1.1	Définition d'une fonction	2
1.2	Parité, périodicité	2
1.3	Opérations sur les fonctions	3
1.4	Variation d'une fonction	4
1.5	Fonctions minorées, majorées, bornées	4
1.6	Fonction bijective	5
1.7	Dérivée d'une fonction	7
2	Fonctions usuelles	9
2.1	Logarithme	9
2.2	Exponentielle	10
2.3	Fonctions puissances	11
2.4	La valeur absolue	13
2.5	Fonctions trigonométriques	14
2.6	Fonctions trigonométriques réciproques	16
2.7	Fonctions hyperboliques	17
3	Représentation graphique des fonctions usuelles	18

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Définition d'une fonction



Définition d'une fonction

On appelle **fonction** définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $A \subset \mathbb{R}$, un procédé f qui, à tout $x \in D$, associe un unique élément, noté $f(x) \in A$. On note alors $f: D \rightarrow A$. On dit que D est l'**ensemble de définition** de f et A l'**ensemble d'arrivée**. Si $y = f(x)$, on dit que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f .

Exemples 1. • Quelle est l'image de 0 par la fonction $\cos$? Quels sont les antécédents de 1 par $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- La fonction $f: \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow [1; +\infty[\\ x \longmapsto \frac{1}{x^2} + 2 \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $[1; +\infty[$.

Solution des exemples 1 :

- Comme $\cos(0) = 1$, l'image de 0 par $\cos$ est 1. Les antécédents de 1 par $\cos$ sont exactement les $2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
- En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, le nombre $\frac{1}{x^2} + 2$ est bien défini et $\frac{1}{x^2} + 2 \geq 1$ donc $\frac{1}{x^2} + 2 \in [1; +\infty[$.
- On a $1/4 \in \mathbb{R}_+^*$, pourtant $g(1/4) = \ln(3/4) \notin \mathbb{R}_+^*$. Pour $x = 3\pi/2 \in \mathbb{R}_+^*$, mais $\cos(3\pi/2) = -1$ donc h n'est pas définie en $3\pi/2$.



Péril imminent à ne pas confondre fonction et nombre

Si $f: D \rightarrow A$ est une fonction et $x \in D$, alors $f(x)$ est un nombre. Ainsi, « $f(x)$ est dérivable» n'a aucun sens.



Définition du graphe d'une fonction

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle **graphe/courbe** de f l'ensemble des points : $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$.



Définition de l'image d'une fonction

Soit $f: D \rightarrow A$. L'**image** de f , notée $f(D)$, est l'ensemble des images des éléments de D par f : $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$.



Attention à ne pas confondre image d'une fonction et son ensemble d'arrivée

Il est juste de dire que $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \in \mathbb{R}^+$. Cependant, $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$. D'une manière générale, si $f: D \rightarrow A$, on a toujours $f(D) \subset A$ mais pas forcément égalité.

1.2 Parité, périodicité



Définition d'une fonction paire/impair

Soit D un ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 : pour tout $x \in D$, $-x \in D$. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

- On dit que f est **paire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$: $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f est **impaire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$: $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples 2. La fonction $f: x \mapsto x^2$ est paire, la fonction $g: x \mapsto x^3$ est impaire.

Solution des exemples 2 : L'ensemble $\mathbb{R}$ est bien évidemment symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = f(x)$ et $g(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -g(x)$. Donc f est paire et g est impaire.



Définition d'une fonction périodique

On dit que $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est **périodique** si $\exists T > 0 \quad \forall x \in D \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x)$
 On dit que T est **une période** de f et que f est T -périodique. Si elle existe, on appelle **période fondamentale** de f la plus petite période de f .

Exemple 3. 6π est une période de sin, mais la période fondamentale de sin est 2π .

Solution de l'exemple 3 : Soit $x \in \mathbb{R}$, notons que le point M sur le cercle trigonométrique tel que un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit x est égal au point N sur le cercle trigonométrique tel que un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{ON}$ soit $x + 6\pi$, en particulier, ils ont la même ordonnée, donc $\sin(x + 6\pi) = \sin(x)$, ainsi la fonction sin est périodique et 6π en est une période. Par le même raisonnement, 2π est aussi une période de sin. Soit $T > 0$ une période de sin, alors en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + T) = \sin(x)$, pour $x = \pi/2$, on obtient que $\sin(\pi/2 + T) = 1$, ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi/2 + T = \pi/2 + 2k\pi$, donc $T = 2k\pi$, comme $T > 0$, on en déduit que $k > 0$ donc que $k \geq 1$, ainsi $T \geq 2\pi$. Ainsi, la plus petite période possible est 2π . La période fondamentale de sin est 2π .

Remarque 1. Savoir si une fonction est paire/impair/périodique permet de réduire son domaine d'étude.

1.3 Opérations sur les fonctions

On connaît les opérations usuelles $+$, $-$, $\times$, $\div$ entre les nombres réels. Cependant, les fonctions n'étant pas des nombres, il faut définir la somme, le produit ou le quotient de deux fonctions, ou encore le produit d'un réel par une fonction.



Définition des opérations sur les fonctions

Soient $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on appelle :

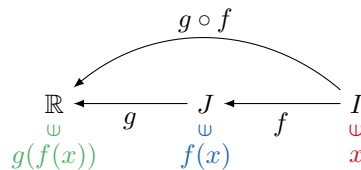
- $f + g$ la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $f(x) + g(x)$, ainsi $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- λf la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $\lambda f(x)$, ainsi $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- fg la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $f(x)g(x)$, ainsi, $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- Si, pour tout $x \in D$, $g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ la fonction qui, à tout $x \in D$, associe le réel $\frac{f(x)}{g(x)}$, ainsi, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.



Définition de la composée de deux fonctions

Soient $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$. La **composée** de g et f , notée $g \circ f$, est définie par, pour tout $x \in I$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Remarques 2. • La composée se déroule suivant le schéma :



- Si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies, très souvent, $f \circ g \neq g \circ f$. Si $f \circ g = g \circ f$, on dit que les fonctions f et g **commutent**.

Exemples 4. • Si $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto x + 1$, donner l'expression de $f \circ g$ et $g \circ f$. Est-ce que f et g commutent ?
 • Quel est l'ensemble de définition de $x \mapsto \ln(x^2 - 3)$?

Solution des exemples 4 :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$ et $g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$, ainsi, $f \circ g: x \mapsto (x + 1)^2$ et $g \circ f: x \mapsto x^2 + 1$
- Remarquons que $(f \circ g)(1) = 4$ tandis que $(g \circ f)(1) = 2$, ainsi, $f \circ g \neq g \circ f$, dès lors, f et g ne commutent pas.
- Comme $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 3 > 0$. Or, $x^2 - 3 > 0$ ssi $x^2 > 3$ ssi $x > \sqrt{3}$ ou $x < -\sqrt{3}$. Posons

$$D =]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[, \text{ ainsi, } f: \begin{cases} D \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto x^2 - 3 \end{cases} \quad \text{et } \ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } f \circ g: x \mapsto \ln(x^2 - 3) \text{ est donc définie sur } D.$$

1.4 Variation d'une fonction



Définition d'une fonction (strictement) croissante, décroissante, monotone, constante

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- f est dite **croissante** sur D si $\forall (x, x') \in D^2 \quad x \leq x' \implies f(x) \leq f(x')$
- f est dite **décroissante** sur D si $\forall (x, x') \in D^2 \quad x \leq x' \implies f(x) \geq f(x')$
- f est dite **strictement croissante** sur D si $\forall (x, x') \in D^2 \quad x < x' \implies f(x) < f(x')$
- f est dite **strictement décroissante** sur D si $\forall (x, x') \in D^2 \quad x < x' \implies f(x) > f(x')$
- f est dite (resp. **strictement**) **monotone** sur D si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante sur D .
- On dit que f est **constante** sur D , s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $f(x) = C$.

Remarque 3. Si f est strictement croissante sur D alors pour tout $(x, x') \in D^2$, $x < x'$ ssi $f(x) < f(x')$.

Justification de la remarque 3 : Supposons f est strictement croissante sur D . Soit $(x, x') \in D^2$. Si $x < x'$ alors, par définition d'une fonction strictement croissante, $f(x) < f(x')$. Si $x \geq x'$ alors comme f est croissante, $f(x) \geq f(x')$, par contraposée, si $f(x) < f(x')$ alors $x < x'$.

Exemple 5. La fonction $f: x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ ni décroissante sur $\mathbb{R}$, elle n'est donc pas monotone sur $\mathbb{R}$. En revanche, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et est donc strictement monotone sur cet intervalle.

Solution de l'exemple 5 : Posons $x = -1$ et $x' = 0$, alors $x \leq x'$ et $f(x) = 1 \not\leq f(x') = 0$, donc f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. Posons $x = 0$ et $x' = 1$, alors $x \leq x'$ et $f(x) = 0 \not\geq f(x') = 1$, donc f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme f n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$, elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. Soit $(x, x') \in \mathbb{R}_+^2$, supposons $x < x'$, alors $x'^2 - x^2 = (x' - x)(x + x') > 0$ il en découle que $f(x') > f(x)$. Par conséquent, on a montré que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, f est donc monotone sur $\mathbb{R}_+$.



Proposition n° 1 : variation d'une composée de deux fonctions monotones

Soient $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f est (resp. strict.) croissante et g est (resp. strict.) croissante, alors $g \circ f$ est (resp. strict.) croissante.
2. Si f est croissante sur I et g est décroissante sur J , alors $g \circ f$ est décroissante sur I .
3. Si f est décroissante sur I et g est croissante sur J , alors $g \circ f$ est décroissante sur I .
4. Si f est décroissante sur I et g est décroissante sur J , alors $g \circ f$ est croissante sur I .

Démonstration de la proposition n° 1 :

1. Si f est croissante sur I et g croissante sur J . Soit $(x, x') \in I^2$. Supposons $x \leq x'$, alors par croissance de f , $f(x) \leq f(x')$. Par croissance de g , on obtient $g(f(x)) \leq g(f(x'))$ donc $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(x')$. On a ainsi montré que $g \circ f$ est croissante sur I . Si f est strictement croissante sur I et g strictement croissante sur J . Soit $(x, x') \in I^2$. Supposons $x < x'$, alors par croissance stricte de f , $f(x) < f(x')$. Par croissance stricte de g , on obtient $g(f(x)) < g(f(x'))$ donc $(g \circ f)(x) < (g \circ f)(x')$. On a ainsi montré que $g \circ f$ est strictement croissante sur I .
2. Si f est croissante sur I et g décroissante sur J . Soit $(x, x') \in I^2$. Supposons $x \leq x'$, alors par croissance de f , $f(x) \leq f(x')$. Par décroissance de g , on obtient $g(f(x)) \geq g(f(x'))$ donc $(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(x')$. On a ainsi montré que $g \circ f$ est décroissante sur I .
3. Si f est décroissante sur I et g croissante sur J . Soit $(x, x') \in I^2$. Supposons $x \leq x'$, alors par décroissance de f , $f(x) \geq f(x')$. Par croissance de g , on obtient $g(f(x)) \geq g(f(x'))$ donc $(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(x')$. On a ainsi montré que $g \circ f$ est décroissante sur I .
4. Si f est décroissante sur I et g décroissante sur J . Soit $(x, x') \in I^2$. Supposons $x \leq x'$, alors par décroissance de f , $f(x) \geq f(x')$. Par décroissance de g , on obtient $g(f(x)) \leq g(f(x'))$ donc $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(x')$. On a ainsi montré que $g \circ f$ est croissante sur I . ■

1.5 Fonctions minorées, majorées, bornées



Définition d'une fonction minorée, majorée, bornée

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que la fonction f est **majorée** sur D si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M$
- On dit que la fonction f est **minorée** sur D si : $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geq m$
- On dit que f est **bornée** sur D si f est majorée et minorée : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in D \quad m \leq f(x) \leq M$

Remarque 4. On dit que m est un **minorant** de f et M est un **majorant** de f . S'ils existent, les minorants/majorants ne sont pas uniques!

Exemples 6.

- La fonction $\exp$ est minorée sur $\mathbb{R}$ par -4 mais n'est pas majorée et n'est pas bornée.
- La fonction $\sin$ est bornée sur $\mathbb{R}$: 5 est un majorant et -3 est un minorant de $\sin$.

1.6 Fonction bijective



Définition d'une bijection et bijection réciproque

On dit que $f: I \rightarrow J$ est **bijective/une bijection** si tout $y \in J$ admet un unique antécédent par f dans I i.e. :

$$\forall y \in J \quad \exists! x \in I \quad y = f(x)$$

On pose alors $f^{-1}(y) = x$, ceci définit une fonction $f^{-1}: \begin{cases} J \longrightarrow I \\ y \longmapsto f^{-1}(y) \end{cases}$ appelée **bijection réciproque** de f .

(a) f continue et strictement monotone.

(b) f non continue et non monotone.

(c) Construction de la bijection réciproque f^{-1} .

FIGURE 1 – Si $f: I \rightarrow J$ bijective : pour tout $y \in J$, la droite horizontale de hauteur y coupe la courbe de f en unique point.

Exemple 7. Montrer que l'application $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x + 2 \end{cases}$ est bijective et trouver sa bijection réciproque.

Solution de l'exemple 7 : Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche à montrer que l'équation, d'inconnue x , $y = f(x)$ admet une et une seule solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$y = f(x) \iff y = 3x + 2 \iff y - 2 = 3x \iff x = \frac{y - 2}{3}$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, y admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ pour la fonction f et cet antécédent est $(y - 2)/3$. Ainsi, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est

bijective et $f^{-1}(y) = (y - 2)/3$, ainsi la bijection réciproque de f est $f^{-1}: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \frac{y - 2}{3} \end{cases}$. Si on n'aime pas que y soit la variable,

comme elle est muette, on peut aussi noter, $f^{-1}: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x - 2}{3} \end{cases}$.



Proposition n° 2 : propriétés d'une bijection et de sa bijection réciproque

Si f est une bijection de I vers J .

1. $\forall x \in I \quad f^{-1}(f(x)) = x$ (i.e. $f^{-1} \circ f = \text{Id}_I$)
2. $\forall y \in J \quad f(f^{-1}(y)) = y$ (i.e. $f \circ f^{-1} = \text{Id}_J$)
3. $\forall (x, y) \in I \times J \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
4. $f^{-1}: J \rightarrow I$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$
5. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à $y = x$

Démonstration de la proposition n° 2 :

1. Soit $x \in I$. On pose $y = f(x) \in J$. Alors, comme f est bijective, x est l'unique antécédent de y par f , ainsi, par définition de f^{-1} , $x = f^{-1}(y)$. Dès lors, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.
2. Soit $y \in J$. Il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$ et, par définition de f^{-1} , $f^{-1}(y) = x$, ainsi $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.
3. Rappelons que $f^{-1}: J \rightarrow I$. Soit $x \in I$, posons $y = f(x) \in J$, alors par définition, $f^{-1}(y) = x$. Ceci prouve que x admet un antécédent pour la fonction f^{-1} . Soit y' un antécédent de x par f^{-1} : $x = f^{-1}(y')$, si on applique la fonction f , on obtient $f(x) = f(f^{-1}(y')) = y'$. Mais $f(x) = y$. Dès lors, $y' = y$. Ainsi, il y a unicité de l'antécédent de x par f^{-1} . Ceci prouve que f^{-1} est bijective. De plus, on a prouvé que pour tout $x \in I$, $(f^{-1})^{-1}(x) = y = f(x)$. Ceci prouve que $(f^{-1})^{-1} = f$.
4. Soit $x \in I$ posons $y = f(x) \in J$ de sorte que $A = (x, y) \in \mathcal{C}_f$. De plus, $x = f^{-1}(y)$ Définitions $B = (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$. Démontrons que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dont $\vec{u} = (1, 1)$ est un vecteur directeur, or,

$$\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \rangle = (y - x) \times 1 + (x - y) \times 1 = 0$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est bien perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$. De plus le milieu du segment $[A, B]$ est $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{y+x}{2}\right)$ et il appartient bien à la droite d'équation $y = x$. Ceci démontre que B est bien le symétrique de A par rapport à la droite d'équation $y = x$.

De même, si $y \in J$, posons $x = f^{-1}(y) \in I$ et $B = (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$, alors $A = (x, y) \in \mathcal{C}_f$ et A est bien le symétrique de B par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Ainsi, tous les points de $\mathcal{C}_f$ admettent un symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ qui est sur $\mathcal{C}_{f^{-1}}$. On montre exactement de la même façon que tous les points de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admettent un symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ qui est sur $\mathcal{C}_f$. Ceci démontre que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. ■

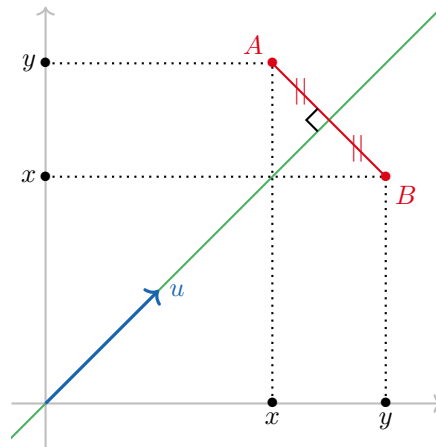


FIGURE 2 – Les points A et B sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Théorème n° 1 de la bijection strictement monotone (continuité admise, $f(I)$ admis provisoirement)

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors $f: I \rightarrow f(I)$ est bijective et $f(I)$ vaut :

	$I = [a; b]$	$I = [a; b[$	$I =]a; b]$	$I =]a; b[$
f strict. croissante	$[f(a); f(b)]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$
f strict. décroissante	$[f(b); f(a)]$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$

De plus, $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ est continue sur $f(I)$ et est strictement monotone et de la même monotonie que f .

Démonstration du théorème n° 1 :

- Montrons que $f: I \rightarrow f(I)$ est bijective. Soit $y \in f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$, alors il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, tout élément de $f(I)$ admet bien au moins un antécédent. Soient $y \in f(I)$ et $(x, x') \in I^2$. Supposons que $y = f(x) = f(x')$, alors :
 - Si $x < x'$ et que f est strictement croissante, alors $f(x) < f(x')$ donc $y < y$ ce qui est impossible.
 - Si $x > x'$ et que f est strictement croissante, alors $f(x) > f(x')$ donc $y > y$ ce qui est impossible.
 - Si $x < x'$ et que f est strictement décroissante, alors $f(x) > f(x')$ donc $y > y$ ce qui est impossible.
 - Si $x > x'$ et que f est strictement décroissante, alors $f(x) < f(x')$ donc $y < y$ ce qui est impossible.
 Dès lors, $x = x'$, ainsi y admet un et seul antécédent. On a donc montré que $f: I \rightarrow f(I)$ est bijective.
- On admet provisoirement la valeur de $f(I)$ (sera démontrée au chapitre limites et continuité)

- On admet que $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ est continue (la preuve sera présentée dans le polycopié du chapitre limites et continuité mais n'est pas exigible)
- Montrons que f^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que f .
 - Si f est strictement croissante sur I , montrons que f^{-1} l'est aussi. Soient $(y, y') \in f(I)^2$, supposons $y < y'$. On cherche à montrer que $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Supposons que $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$, alors comme f est croissante, on en déduit que $f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y'))$ donc $y \geq y'$ ce qui est absurde. Dès lors, $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$.
 - Si f est strictement décroissante sur I , montrons que f^{-1} l'est aussi. Soient $(y, y') \in f(I)^2$, supposons $y < y'$. On cherche à montrer que $f^{-1}(y) > f^{-1}(y')$. Supposons que $f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y')$, alors comme f est décroissante, on en déduit que $f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y'))$ donc $y \geq y'$ ce qui est absurde. Dès lors, $f^{-1}(y) > f^{-1}(y')$. ■

Exemples 8. • $f: x \mapsto x^3$ est une bijection de $[-1; 2[$ vers $[-1; 8[$.
 • Démontrer que $g: x \mapsto e^{-x}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un ensemble à déterminer.

Solution des exemples 8 :

- La fonction f est strictement croissante sur $[-1; 2[$ (en effet, si $x < x'$, alors $x'^3 - x^3 = (x' - x)(x'^2 + xx' + x^2) > 0$) et continue, ainsi, d'après le [théorème n° 1 de la bijection strictement monotone](#), f est une bijection de $[-1; 2[$ vers

$$\left[f(-1); \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \right[= [-1; 8[$$

- Comme $x \mapsto -x$ est strictement décroissante et que $\exp$ est strictement croissante, on en déduit, par composée, que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, de plus, par composée, g est continue sur $\mathbb{R}_+$, ainsi, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ vers $\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(0) \right[=]0; 1[$.

Remarques 5. • Quand on applique ce théorème, toujours préciser les ensembles de départ et d'arrivée considérés.
 • On verra plus tard que si f est continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est nécessairement un intervalle.

1.7 Dérivée d'une fonction

À partir de maintenant $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.



Définition du nombre dérivé en un point a

On dit que f est **dérivable** en $a \in I$ si $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une **limite finie** en a . Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

(a) Fonction dérivable en a .

(b) Fonction non dérivable en a , le taux d'accroissement entre b et a n'a pas de limite quand b tend vers a .

(c) Fonction non dérivable en a , le taux d'accroissement entre b et a tend vers $+\infty$ quand b tend vers a .

Remarque 6. La fonction f est dérivable en a ssi $h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Dans ce cas, $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Exemple 9. Montrer que la fonction carrée est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exemple 9 : Soit $a \in \mathbb{R}$, étudions la dérivabilité de $f: x \mapsto x^2$ par les deux limites possibles :

- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a \xrightarrow{x \rightarrow a} 2a$. Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.
- Soit $h \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{(a + h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2a$. Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.



Définition de la tangente en un point a sur lequel f est dérivable

Si f est dérivable en $a \in I$, alors la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée **tangente** de f en a .

Remarque 7. Le signe de $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ détermine la position de la courbe par rapport à sa tangente en a .



Définition d'une fonction dérivable et fonction dérivée

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** l'application $f': \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$.

Remarque 8. Cette fonction dérivée f' se note aussi en physique $\frac{df}{dx}$. Quand la variable est t , on a aussi la notation $\frac{df}{dt}$ ou même $\dot{\theta}$ pour des fonctions angulaires.



Proposition n° 3 : somme/produit/quotient de fonctions dérivables

(admis provisoirement)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

- Combinaison linéaire : la fonction $\lambda f + g$ est dérivable sur I et
- Produit : la fonction fg est dérivable sur I et
- Quotient : Si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)' &= \lambda f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$



Proposition n° 4 : composée de fonctions dérivables

(admis provisoirement)

Soient $f: I \rightarrow J$ dérivable sur I et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur J . Alors, $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Exemples 10. Dériver $x \mapsto \cos(x^2)$, $x \mapsto \exp(u(x))$, $x \mapsto \ln(u(x))$, $x \mapsto \sin(u(x))$, $x \mapsto (u(x))^n$, où u est une fonction dérivable sur I (strictement positive dans le cas du $\ln$) et $n \in \mathbb{N}$.

Solution des exemples 10 :

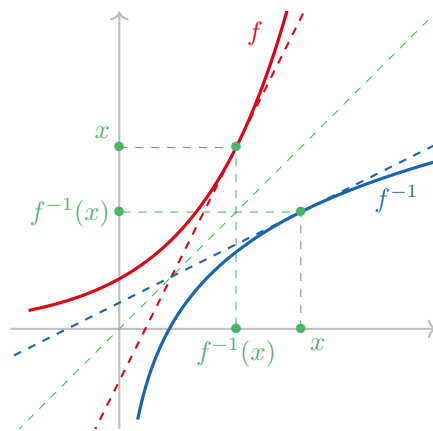
- Posons $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto \cos$, alors f et g sont toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$, par composée, $(g \circ f): x \mapsto \cos(x^2)$ est dérivable de dérivée $x \mapsto f'(x)g'(f(x)) = 2x(-\sin(x^2))$
- Posons $f: \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$ et $g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(x) \end{cases}$, alors f est dérivable sur I et g est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée $g \circ f: x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée, $x \mapsto f'(x)g'(f(x)) = u'(x)\exp(u(x))$.
- Posons $f: \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$ et $g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$, alors f est dérivable sur I et g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée $g \circ f: x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée, $x \mapsto f'(x)g'(f(x)) = u'(x)\frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
- Posons $f: \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$ et $g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$, alors f est dérivable sur I et g est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée $g \circ f: x \mapsto \sin(u(x))$ est dérivable de dérivée, $x \mapsto f'(x)g'(f(x)) = u'(x)\cos(u(x))$.
- Posons $f: \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$ et $g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$, alors f est dérivable sur I et g est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée $g \circ f: x \mapsto u(x)^n$ est dérivable de dérivée, $x \mapsto f'(x)g'(f(x)) = u'(x)n(u(x))^{n-1}$.



Théorème n° 2 de la dérivée de la bijection réciproque (admis provisoirement)

Soient $f: I \rightarrow J$ une bijection et $x \in J$. Si f est dérivable en $f^{-1}(x)$ et que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, alors, $f^{-1}: J \rightarrow I$ est dérivable en x et :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



Remarque 9. Les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques à la droite d'équation $y = x$. Si $f'(f^{-1}(x)) = 0$ alors f admet une tangente horizontale en $f^{-1}(x)$ et donc f^{-1} admet une tangente verticale en x .



Théorème n° 3 : dérivées et fonctions constantes, (strictement) monotones (admis provisoirement)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.
- **Si** pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, **alors** f est strictement croissante.

Exemple 11. Étudier la stricte monotonie de $f: x \mapsto x - \sin(x)$ sur $[0; 6\pi]$.

Solution de l'exemple 11 : Par somme de fonctions dérivables, f est dérivable sur $[0; 6\pi]$. Pour tout $x \in [0; 6\pi]$, $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$, de plus, $f'(x) = 0$ ssi $\cos(x) = 1$ ssi $x \in \{0, 2\pi, 4\pi, 6\pi\}$. Ainsi, f' est positive et ne s'annule que quatre fois, on peut donc en conclure que f est strictement croissante sur $[0; 6\pi]$.

2 Fonctions usuelles

2.1 Logarithme



Définition du logarithme népérien

L'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 est appelée fonction **logarithme népérien** et est notée $\ln$.



Proposition n° 5 : propriétés du logarithme

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$:

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\ln(1) = 0$ | 2. $\ln(a) = \int_1^a \frac{1}{t} dt$ | 3. $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ |
| 4. $\ln': x \mapsto x^{-1}$ | 5. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ | 6. $\ln(1/a) = -\ln(a)$ |
| 7. $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ | 8. $\forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a)$ | 9. $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ |
| 10. $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$ | 11. $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective | 12. $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ |

Démonstration de la proposition n° 5 :

1. Par définition, $\ln$ est une fonction qui s'annule en 1.
2. $\int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x)$.
3. Par définition, $\ln$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Comme $\ln$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$.

5. Fixons $b > 0$ et posons, pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln(xb) - \ln(x) - \ln(b)$, $x \mapsto xb$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composé, $x \mapsto \ln(xb)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{b}{xb} - \frac{1}{x} - 0 = 0$, ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = f(1) = \ln(b) - \ln(1) - \ln(b) = 0$$

Ainsi, $\ln(xb) = \ln(x) + \ln(b)$.

6. En prenant $b = 1/a$, on obtient $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab) = \ln(1) = 0$. Ainsi, $\ln(a) + \ln(1/a) = 0$ d'où $\ln(1/a) = -\ln(a)$.

7. $\ln(a/b) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

8. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $\ln(a^n) = n \ln(a)$ ». Pour $n = 0$, $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(a) = n \ln(a)$, ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors, $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n \ln(a) + \ln(a) = (n+1) \ln(a)$, ainsi $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{Z}_-$, alors $\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = (-1) \times (-n) \ln(a) = n \ln(a)$.

9. La fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car sa dérivée est positive), ainsi $\ln$ admet une limite en $+\infty$. Notons ℓ cette limite, soit $\ell = +\infty$ soit $\ell \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $\ln$ est croissante, on en déduit que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq \ell$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2^n) \leq \ell$, donc $n \ln(2) \leq \ell$. Dès lors, comme $\ln(2) > 0$, $n \leq \frac{\ell}{\ln(2)}$, en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, $+\infty \leq \frac{\ell}{\ln(2)}$, ainsi, nécessairement, $\ell = +\infty$. Par conséquent, $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

10. $\ln(x) = -\ln(1/x)$, or $1/x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, ainsi, $\ln(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, dès lors, $\ln(x) = -\ln(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$.

11. Comme la dérivée de $\ln$ est strictement positive, $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le [théorème n° 1 de la bijection strictement monotone](#), $\ln$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers

$$\ln(\mathbb{R}_+^*) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

12. Posons, pour $x > -1$, $f(x) = x - \ln(1+x)$. Par différence et composée, f est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et

$$f' : x \mapsto 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

D'une part, pour $x \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, ainsi, f est croissante sur $[0; +\infty[$, donc, pour $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$.

D'autre part, pour $x \in]-1; 0]$, $f'(x) \leq 0$, ainsi f est décroissante sur $] -1; 0]$, donc pour $x \in]-1; 0]$, $f(x) \geq f(0) = 0$. Dès lors, pour $x > -1$, $x - \ln(1+x) \geq 0$ donc $\ln(1+x) \leq x$.

Remarque 10. Le logarithme en base 10 (resp. 2) est défini par, si $x > 0$, $\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ (resp. $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$). Ces fonctions ont des propriétés similaires au logarithme népérien, mais $\log_{10}(10) = 1$ et $\log_2(2) = 1$.

2.2 Exponentielle



Définition de la fonction exponentielle

| La bijection réciproque de $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **exponentielle** et notée $\exp$.



Proposition n° 6 : propriétés de la fonction exponentielle

Pour tout $(a, a', b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$:

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective | 2. $b = \exp(a) \iff a = \ln(b)$ | 3. $\exp(0) = 1$ |
| 4. $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ | 5. $\exp' = \exp$ | 6. $\exp(a + a') = \exp(a) \exp(a')$ |
| 7. $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ | 8. $\exp(a - a') = \frac{\exp(a)}{\exp(a')}$ | 9. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exp(a)^n = \exp(an)$ |
| 10. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \geq 1 + x$ | 11. $\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ | 12. $\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ |

Démonstration de la proposition n° 6 :

1. Comme $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective, $\exp = \ln^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective d'après la proposition n° 2 sur les fonctions bijectives.
2. Si $b = \exp(a)$, alors $\ln(b) = \ln(\exp(a)) = a$, de même si $a = \ln(b)$, alors $\exp(a) = \exp(\ln(b)) = b$ (d'après la proposition n° 2 sur les fonctions bijectives).
3. Comme $\ln(1) = 0$, alors $\exp(0) = \exp(\ln(1)) = 1$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\ln$ est dérivable au point $\exp(x)$ et $\ln'(\exp(x)) = \frac{1}{\exp(x)} \neq 0$, ainsi d'après le théorème n° 2 de la dérivabilité de la bijection réciproque, $\exp$ est dérivable en x .
5. En utilisant encore le théorème n° 2, on obtient :

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$$

6. $\exp(a + a') = \exp(\ln(\exp(a)) + \ln(\exp(a'))) = \exp(\ln(\exp(a) \exp(a'))) = \exp(a) \exp(a')$
7. D'après le point précédent, $1 = \exp(0) = \exp(a + (-a)) = \exp(a) \exp(-a)$ comme $\exp(a) \neq 0$, $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$.
8. En utilisant les points précédents, $\exp(a - a') = \exp(a + (-a')) = \exp(a) \exp(-a') = \frac{\exp(a)}{\exp(a')}$
9. Soit $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(a)^n = \exp(\ln(\exp(a)^n)) = \exp(n \ln(\exp(a))) = \exp(na)$
10. Posons $f: x \mapsto \exp(x) - 1 - x$, alors par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f': x \mapsto \exp(x) - 1$.
 - Comme $\exp$ est croissante (car $\ln$ est strictement croissante), pour $x \geq 0$, $\exp(x) \geq \exp(0)$ et donc $f'(x) \geq 0$, ainsi, f est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, donc pour $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0)$.
 - Pour $x \leq 0$, $\exp(x) \leq \exp(0)$ et donc, $f'(x) \leq 0$, ainsi f est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_-$, donc pour $x \leq 0$, $f(x) \geq f(0)$.Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(0) = 0$ donc $\exp(x) \geq 1 + x$.
11. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq 1 + x$, et $1 + x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, par comparaison, $\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
12. Posons $X = -x$, alors $\exp(x) = \exp(-X) = \frac{1}{\exp(X)}$, or $X \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ et $\exp(X) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ et donc par inverse de limite, $\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

■

Remarques 11. • La fonction $\exp$ est la seule fonction égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 en 0.

- Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on peut définir la fonction exponentielle en base a par $x \mapsto \exp(x \ln(a))$. On obtient une fonction qui vaut a en 1, qui transforme les sommes en produit et dont la dérivée est $x \mapsto \ln(a) \exp(x \ln(a))$.

2.3 Fonctions puissances



Définition de la puissance

On définit x^α dans plusieurs cas :

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \overbrace{x \times x \times \cdots \times x}^{n \text{ fois}}$, par convention, $x^0 = 1$.
- Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+^*$, on pose pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose pour $x > 0$, $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.

Dans tous les cas, ceci définit une fonction $p_\alpha: x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 12. • Si le calcul de x^α rentre dans plusieurs cas, on obtient le même résultat.

- En notant $e = \exp(1)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \exp(x \ln(e)) = e^x$.
- De même, pour $a > 0$ et $x > 0$, $\exp(x \ln(a)) = a^x$



Attention à ne pas confondre exponentielle et puissance

Ne pas confondre $x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a))$ (exponentielle en base a) avec $p_\alpha: x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$ (puissance) !



Proposition n° 7 : propriétés de la fonction puissance

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

1. $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$, $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ et $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ (aussi vrai si $(x, y, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^2$ ou si $(x, y, \alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2 \times \mathbb{Z}^2$)
2. $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$, sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}$, de dérivée $p'_\alpha : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
3. Si $\alpha > 0$, p_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
4. Si $\alpha < 0$, p_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, $x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

Remarque 13. Si $\alpha > 0$, on pose $p_\alpha(0) = 0$, ainsi la fonction p_α est maintenant définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ (et non $\mathbb{R}_+^*$).

	$\alpha = 0$	$\alpha \in \mathbb{N}^*$	$\alpha \in \mathbb{Z}^*$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
Définie sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}_+$ si $\alpha > 0$)
$p_\alpha : x \mapsto$	$x^0 = 1$	$x^\alpha = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{\alpha \text{ fois}}$	$x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$	$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ ($p_\alpha(0) = 0$ si $\alpha > 0$)
Continue sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}_+$ si $\alpha > 0$)
Dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}_+$ si $\alpha > 1$)
Fonction dérivée	$x \mapsto 0$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ ($p'_\alpha(0) = 0$ si $\alpha > 1$)
Limite en 0^+	1	0	$+\infty$	0 si $\alpha > 0$, $+\infty$ si $\alpha < 0$
Limite en $+\infty$	1	$+\infty$	0	$+\infty$ si $\alpha > 0$, 0 si $\alpha < 0$

TABLE 1 – Résumé des propriétés des fonctions puissances. Les cas particuliers en violet découlent de la remarque 13.



Exemple la fonction racine n -ième

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$
- Si $n \in \mathbb{N}$ est impair, $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Remarque 14. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.



Proposition n° 8 : croissances comparées

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

1. $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
2. $\frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
3. $\frac{x}{\exp(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
4. $\frac{x^\beta}{\exp(\alpha x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
5. $x \exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$
6. $|x|^\beta e^{\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$
7. $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
8. $x^\alpha |\ln(x)|^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

Démonstration de la proposition n° 8 :

1. Soit $x > 1$, $0 \leq \frac{\ln(x)}{x} = \frac{2 \ln(\sqrt{x})}{x} \leq \frac{2 \ln(1 + \sqrt{x})}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
2. Soit $x > 1$, $\frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln(x^{\frac{\beta}{\alpha}})}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha$. Or, $X = x^{\frac{\beta}{\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{\ln(X)}{X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$, ainsi, par une composée de limite $\frac{\ln(x^{\frac{\beta}{\alpha}})}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, par puissance positive, $\left(\frac{\ln(x^{\frac{\beta}{\alpha}})}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{x}{\exp(x)} = \left(\frac{\sqrt{x}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2 \leq \left(\frac{\sqrt{x}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{4}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.

■

2.4 La valeur absolue



Définition de la valeur absolue

La fonction $x \mapsto |x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée **valeur absolue**.



Proposition n° 9 : propriétés de la valeur absolue

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- | | |
|--|--|
| 1. $ -x = x $ (la valeur absolue est paire) | 2. $ xy = x \times y $ |
| 3. $ x + y \leq x + y $ (inégalité triangulaire) | 4. $ x - y \leq x - y $ (2 nd inégalité triangulaire) |
| 5. $ x \leq r \iff -r \leq x \leq r$ | 6. $ x < r \iff -r < x < r$, |
| 7. $ x = r \iff x = \pm r$ | 8. $ x \geq r \iff x \geq r \text{ ou } x \leq -r$ |

Démonstration de la proposition n° 9 :

- $|-x| = \max(-x, x) = \max(x, -x) = |x|$
- En distinguant les cas :
 - Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $|xy| = xy = |x||y|$.
 - Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \leq 0$ et $|xy| = -xy = |x||y|$.
 - Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \leq 0$ et $|xy| = -xy = |x||y|$.
 - Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \geq 0$ et $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.
- En calculant le carré de $|x + y|^2$:

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = |x|^2 + 2|x| \times |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $|x + y| \leq |x| + |y|$.

- $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ donc $|x| - |y| \leq |x - y|$, de même $|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|$, donc $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Ainsi, $||x| - |y|| \leq \max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leq |x - y|$.
- Supposons $|x| \leq r$, alors si $x \geq 0$, on a $-r \leq 0 \leq x = |x| \leq r$ donc $-r \leq x \leq r$, si $x \leq 0$, $|x| = -x \leq r$ donc $-r \leq x \leq 0 \leq r$ donc $-r \leq x \leq r$. Réciproquement si $-r \leq x \leq r$, alors si $x \geq 0$, $|x| = x \leq r$ et si $x \leq 0$, alors $|x| = -x \leq r$.
- Supposons $|x| < r$, alors si $x \geq 0$, on a $-r < 0 \leq x = |x| < r$ donc $-r < x < r$, si $x \leq 0$, $|x| = -x < r$ donc $-r < x \leq 0 < r$ donc $-r < x < r$. Réciproquement si $-r < x < r$, alors si $x \geq 0$, $|x| = x < r$ et si $x \leq 0$, alors $|x| = -x < r$.
- Supposons $|x| = r$, alors si $x \geq 0$, on a $x = |x| = r$ donc $x = r$, si $x \leq 0$, $x = -|x| = -r$ donc $x = -r$, ainsi $x = \pm r$. Réciproquement si $x = \pm r$, alors si $x \geq 0$, alors par parité de la valeur absolue, $|x| = r$.
- On a prouvé au point 6., que

$$|x| < r \iff (-r < x \text{ et } x < r)$$

Par contraposée, d'une équivalence, on obtient $|x| \geq r$ ssi $x \leq -r$ ou $x \geq r$. ■



Proposition n° 10 : une fonction est bornée ssi sa valeur absolue est majorée

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est bornée D ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leq M$.

Démonstration de la proposition n° 10 : Raisonnons par double implication :

- S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leq M$. Soit $x \in D$, alors $-M \leq f(x) \leq M$. Ainsi, la fonction est majorée par M et minorée par $-M$.
- Supposons que f soit bornée, alors il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in D$, $m \leq f(x) \leq M$. Remarquons alors que $M \leq |M| \leq \max(|M|, |m|)$. De même $m \geq -|m| \geq -\max(|M|, |m|)$. Notons $\tilde{M} = \max(|M|, |m|)$, alors pour tout $x \in D$, on a $-\tilde{M} \leq f(x) \leq \tilde{M}$. Ainsi, $|f(x)| \leq \tilde{M}$. ■

Remarque 15. La fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Justification de la remarque 15 : Posons, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \ln(|x|)$, alors, on sait déjà que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, si $x < 0$, alors, $f(x) = \ln(-x)$. Or, $\begin{cases} \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto -x \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f'(x) = (-1) \times \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$. Ainsi, f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

2.5 Fonctions trigonométriques



Définition des fonctions cosinus et sinus

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note M le point du cercle trigonométrique tel que un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit x . On note $\cos(x)$ l'abscisse de M et $\sin(x)$ son ordonnée. On a donc défini deux fonctions $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ et $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$.

Remarques 16.

- Si $x = y + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors ils définissent le même point M sur le cercle trigonométrique. On note alors $x \equiv y [2\pi]$.
- Il faut savoir retrouver les cosinus et sinus de $x \pm \pi$ et $\pi/2 \pm x$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $\cos(a) = \cos(b) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid b = a + 2k\pi$ ou $b = -a + 2k\pi$
et $\sin(a) = \sin(b) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid b = a + 2k\pi$ ou $b = \pi - a + 2k\pi$

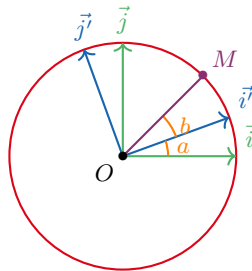


Proposition n° 11 : propriétés des fonctions cosinus et sinus

- | | |
|--|---|
| 1. $\sin$ est impaire, 2π -périodique | 2. $\cos$ est paire, 2π -périodique, |
| 3. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ | 4. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ |
| 5. $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$ | 6. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ |
| 7. $\sin$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\sin' = \cos$. | 8. $\cos$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\cos' = -\sin$. |
| 9. $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$ | 10. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$ |
| 11. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ | 12. $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$ |
| 13. $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$. | 14. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ \sin(x) \leq x $. |

Démonstration de la proposition n° 11 :

1. Si $x \in \mathbb{R}$, notons M (resp. N) le point du cercle trigonométrique dont un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit égal à x (resp. $-x$), alors M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. En particulier, leurs ordonnées sont opposées ainsi, $\sin(-x) = -\sin(x)$. De plus, notons P le point du cercle trigonométrique dont un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OP}$ soit égal à $x + 2\pi$, alors $P = M$ et ils ont la même ordonnée, donc $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Dès lors, $\sin$ est impaire et 2π -périodique.
2. En reprenant le travail fait au point précédent, les abscisses de M et N sont égales, donc $\cos(-x) = \cos(x)$, et les abscisses de M et P sont aussi égales, donc $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, dès lors, $\cos$ est paire et 2π -périodique.
3. Notons M le point du cercle trigonométrique tel qu'un angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit $a + b$, posons $\vec{i'}$ le vecteur dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit $(\cos(a), \sin(a))$ et $\vec{j'}$ le vecteur dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit $(-\sin(a), \cos(a))$.



Remarquons que $(O, \vec{i'}, \vec{j'})$ est un repère. alors, comme l'angle entre OM et $\vec{i'}$ est b , les coordonnées de M dans $(O, \vec{i'}, \vec{j'})$ sont $(\cos(b), \sin(b))$, ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \cos(b)\vec{i'} + \sin(b)\vec{j'} = \cos(b) \left(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j} \right) + \sin(b) \left(-\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j} \right) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\vec{i} + (\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))\vec{j}\end{aligned}$$

Or, l'ordonnée de ce point est aussi $\sin(a + b)$, ainsi, par unicité de l'ordonnée : $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

4. En prenant le travail fait au point précédent, par unicité de l'abscisse, $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
5. En utilisant la parité du $\cos$ et l'imparité du $\sin$, il vient :

$$\sin(a - b) = \sin(a + (-b)) = \sin(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

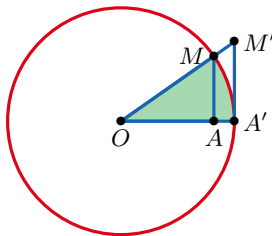
6. En utilisant la parité du $\cos$ et l'imparité du $\sin$, il vient :

$$\cos(a - b) = \cos(a + (-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

7. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \frac{\sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)}{h} - \frac{\sin(a)}{h} = \sin(a) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a) \times \frac{\sin(h)}{h}$$

On a donc besoin d'étudier la limite de $\frac{\sin(h)}{h}$ et de $\frac{\cos(h) - 1}{h}$ quand $h \rightarrow 0$. Pour cela, faisons une petite étude géométrique. Soit $h \in]0; \pi/2[$. Soit M le point du cercle trigonométrique telle que l'angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ vaille h :



Remarquons que par le théorème de Thalès : $\frac{MA}{M'A} = \frac{OA}{OA'} = \frac{\cos(h)}{1}$, ainsi, $MA' = \frac{\sin(h)}{\cos(h)}$, de plus :

- L'aire du triangle OAM vaut $\frac{OA \times MA}{2} = \frac{\cos(h)\sin(h)}{2}$
- L'aire du triangle $OA'M'$ vaut $\frac{OA' \times M'A'}{2} = \frac{1 \times \frac{\sin(h)}{\cos(h)}}{2} = \frac{\sin(h)}{2\cos(h)}$.
- L'aire de la surface verte vaut $\pi \times \frac{h}{2\pi} = \frac{h}{2}$

Comme le triangle OAM est inclus dans cette surface verte elle-même incluse dans le triangle $OA'M'$, on en déduit l'inégalité entre les aires : $\frac{\cos(h)\sin(h)}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{\sin(h)}{2\cos(h)}$. En multipliant par $\sin(h)/2 > 0$, on obtient $\cos(h) \leq \frac{h}{\sin(h)} \leq \frac{1}{\cos(h)}$, en passant à l'inverse, $\cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq \frac{1}{\cos(h)}$, par le théorème d'encadrement, il vient $\frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 1$, par parité de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, on obtient $\frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$. De plus,

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} = \frac{(\cos(h) - 1)(\cos(h) + 1)}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{\sin(h)}{h} \times \frac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \times \frac{-0}{2} = 0$$

En revenant à l'étude du taux d'accroissement, on peut donc en conclure que

$$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sin(a) \times 0 + \cos(a) \times 1 = \cos(a)$$

Ceci montre que $\sin$ est dérivable en a et que $\sin'(a) = \cos(a)$. Comme ceci est fait pour tout $a \in \mathbb{R}$, on en conclut que $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$.

8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, en reprenant le travail fait au point précédent :

$$\frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = \cos(a) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(a) \frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\sin(a)$$

Ceci montre que $\cos$ est dérivable en a et que $\cos'(a) = -\sin(a)$. Comme ceci est fait pour tout $a \in \mathbb{R}$, on en conclut que $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\cos' = -\sin$.

- Notons M le point de coordonnées $(\cos(a), \sin(a))$ et A le point de coordonnées $(\cos(a), 0)$, alors le triangle AMO est rectangle en A , d'après le théorème de Pythagore, $OM^2 = OA^2 + AM^2$ soit $1 = \cos^2(a) + \sin^2(a)$.
- $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1$.
- $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- Comme $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, on a $2\cos^2(a) = 1 + \cos(2a)$ soit $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) = 1 - \frac{1 + \cos(2a)}{2} = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$
- Posons $g: x \mapsto x - \sin(x)$ et $h: x \mapsto x + \sin(x)$. Par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 1 - \cos(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad h'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0$$

Ainsi, g est décroissante et h est croissante. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors $g(x) \leq g(0) = 0$ et $h(x) \geq h(0) = 0$, ainsi, $x - \sin(x) \leq 0$ et $x + \sin(x) \geq 0$, donc $\sin(x) \leq x$ et $\sin(x) \geq -x$, dès lors, $-x \leq \sin(x) \leq x$, on peut en déduire que $|\sin(x)| \leq x = |x|$. Pour $x \leq 0$, on peut appliquer ce qui précède à $-x \geq 0$ et on obtient $|\sin(x)| = |\sin(-x)| \leq |-x| = |x|$ ■

Remarque 17. Grâce à ces formules, on peut trouver une formule donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\cos(b)$ etc.



Définition de la fonction tangente

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x) \neq 0$, on pose $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Ceci définit la fonction **tangente**.

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

TABLE 2 – Tableau des valeurs usuelles des fonctions trigonométriques à connaître.



Proposition n° 12 : propriétés de la fonction tangente

- La fonction $\tan$ est impaire, π -périodique, dérivable sur $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et pour tout $x \in D_{\tan}$:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
- Si $(a, b, a+b) \in D_{\tan}^3$, alors $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, si $(a, b, a-b) \in D_{\tan}^3$, alors $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

2.6 Fonctions trigonométriques réciproques

Remarque 18. Les fonctions $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tan: D_{\tan} \rightarrow \mathbb{R}$ ne sont pas bijectives.



Proposition n° 13 : bijectivité des fonctions trigonométriques sur des «bons» intervalles

$c: \begin{cases} [0; \pi] \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$, $s: \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$ et $t: \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases}$ sont bijectives.

Démonstration de la proposition n° 13 :

- La fonction c est dérivable sur $[0; \pi]$ et pour tout $x \in [0; \pi]$, $c'(x) = -\sin(x) \leq 0$. De plus, pour $x \in [0; \pi]$, $c'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \pi$. Ainsi, c' est une fonction négative et c' ne s'annule que deux fois sur $[0; \pi]$. D'après le [théorème n° 3 de la caractérisation des fonctions strictement monotones](#), c est strictement décroissante sur $[0; \pi]$. De plus, elle est continue (car dérivable) sur $[0; \pi]$. D'après le [théorème n° 1 de la bijection strictement monotone](#), c est une bijection de $[0; \pi]$ vers $[c(\pi); c(0)] = [-1; 1]$.
- La fonction s est dérivable sur $[-\pi/2; \pi/2]$ et pour tout $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, $s'(x) = \cos(x) \geq 0$. De plus, pour $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, $s'(x) = 0$ si et seulement si $x = \pm\pi/2$. Ainsi, s' est une fonction positive et s' ne s'annule que deux fois sur $[-\pi/2; \pi/2]$. D'après le [théorème n° 3](#), s est strictement croissante sur $[-\pi/2; \pi/2]$. De plus, elle est continue (car dérivable) sur $[-\pi/2; \pi/2]$. D'après le [théorème n° 1 de la bijection strictement monotone](#), s est une bijection de $[-\pi/2; \pi/2]$ vers $[s(-\pi/2); s(\pi/2)] = [-1; 1]$.
- La fonction t est dérivable sur $]-\pi/2; \pi/2[$ et pour tout $x \in]-\pi/2; \pi/2[$, $t'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$, donc, d'après le [théorème n° 3](#), t est strictement croissante sur $]-\pi/2; \pi/2[$. De plus, t est continue sur $]-\pi/2; \pi/2[$ (car dérivable). D'après le [théorème n° 1 de la bijection strictement monotone](#), t est une bijection de $]-\pi/2; \pi/2[$ vers

$$\left] \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} t(x); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} t(x) \right[= \mathbb{R}$$

■



Définition des fonctions trigonométriques réciproques

- La bijection réciproque de $c: [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ est appelée **arccos**: $[-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$.
- La bijection réciproque de $s: [-\pi/2; \pi/2] \rightarrow [-1; 1]$ est appelée **arcsin**: $[-1; 1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2]$.
- La bijection réciproque de $t:]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **arctan**: $\mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2; \pi/2[$

- Remarques 19.** • Pour $k \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \cos(x)$ réalise aussi une bijection de $[k\pi; k\pi + \pi]$ vers $[-1; 1]$. Par convention, pour c , on a privilégié $[0; \pi]$ (un intervalle dans $\mathbb{R}_+$ contenant 0). Pour s et t , on a privilégié des intervalles centrés en 0 car $\sin$ et $\tan$ sont impaires.
- Pour tout $x \in [-1; 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$ et pour tout $x \in [0; \pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$.
 - Pour tout $x \in [-1; 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$ et pour tout $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ et pour tout $x \in]-\pi/2; \pi/2[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

Exemples 12. Calculer $\arctan(1)$, $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\cos(\arccos(0))$, $\arccos(\cos(0))$ et $\arccos(\cos(2\pi))$.

Solution des exemples 12 :

- Comme $\tan(\pi/4) = 1$ et que $\pi/4 \in]-\pi/2; \pi/2[$, $\pi/4$ est l'unique antécédent de 1 dans $]-\pi/2; \pi/2[$ pour la fonction tangente, ainsi, $\arctan(1) = \pi/4$.
- Comme $\sin(0) = 0$ et que $0 \in [-\pi/2; \pi/2]$, 0 est l'unique antécédent de 0 dans $[-\pi/2; \pi/2]$ pour la fonction $\sin$, ainsi, $\arcsin(0) = 0$.
- Comme $\sin(\pi/2) = 1$ et que $\pi/2 \in [-\pi/2; \pi/2]$, $\pi/2$ est l'unique antécédent de 1 dans $[-\pi/2; \pi/2]$ pour la fonction $\sin$, ainsi, $\arcsin(1) = \pi/2$.



Proposition n° 14 : propriétés des fonctions trigonométriques réciproques

1. $\arccos$ est continue sur $[-1; 1]$, dérivable sur $] -1; 1 [$ et pour tout $x \in] -1; 1 [$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\arcsin$ est impaire, continue sur $[-1; 1]$, dérivable sur $] -1; 1 [$, pour tout $x \in] -1; 1 [$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $\arctan$ est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Démonstration de la proposition n° 14 :

1. Comme c est une fonction strictement décroissante et continue sur $[0; \pi]$, d'après le théorème n° 1 de la bijection strictement monotone, $\arccos = c^{-1}$ est strictement décroissante et continue sur $[-1; 1]$. Soit $x \in] -1; 1 [$, par décroissance stricte d' $\arccos$, $\arccos(1) < \arccos(x) < \arccos(-1)$ donc $0 < \arccos(x) < \pi$. De plus, c est une fonction dérivable en $\arccos(x)$ et $c'(\arccos(x)) = -\sin(\arccos(x)) < 0$. D'après le théorème n° 2 de dérivation de la bijection réciproque, $\arccos$ est dérivable en x et

$$\arccos'(x) = \frac{1}{c'(c^{-1}(x))} = \frac{1}{c'(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} \underset{\sin(\arccos(x)) > 0}{=} \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. Comme s est une fonction strictement croissante et continue sur $[-\pi/2; \pi/2]$, d'après le théorème n° 1 de la bijection strictement monotone, $\arcsin = s^{-1}$ est strictement croissante et continue sur $[-1; 1]$.

Soit $x \in] -1; 1 [$, alors $-1 < x < 1$ comme $\arcsin$ est strictement croissante sur $[-1; 1]$, $\arcsin(-1) < \arcsin(x) < \arcsin(1)$ donc $-\pi/2 < \arcsin(x) < \pi/2$, or s est dérivable en $\arcsin(x)$ et $s'(\arcsin(x)) = \cos(\arcsin(x)) > 0$. D'après le théorème n° 2 de la dérivation de la bijection réciproque, $s^{-1} = \arcsin$ est dérivable en x et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{s'(s^{-1}(x))} = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \underset{\cos(\arcsin(x)) > 0}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Soit $x \in [-1; 1]$, alors $-x \in [-1; 1]$. Posons $a = \arcsin(x) \in [-\pi/2; \pi/2]$ et $b = \arcsin(-x) \in [-\pi/2; \pi/2]$. Alors, $\sin(a) = x$ et $\sin(-b) = -\sin(b) = -(-x) = x$, avec a et b dans $[-\pi/2; \pi/2]$. Par bijectivité de la fonction s , on en déduit que $a = -b$. Soit $-\arcsin(-x) = \arcsin(x)$. Ainsi, la fonction $\arcsin$ est impaire.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors t est une bijection dérivable en $\arctan(x)$ et $t'(\arctan(x)) = 1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + x^2 > 0$, alors d'après le théorème n° 2 de dérivation de la bijection réciproque, $\arctan$ est dérivable en x et

$$\arctan'(x) = \frac{1}{t'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$. Posons $a = \arctan(x) \in]-\pi/2; \pi/2[$ et $b = \arctan(-x) \in]-\pi/2; \pi/2[$. Alors, $\tan(a) = x$ et $\tan(-b) = -\tan(b) = -(-x) = x$, avec a et b dans $]-\pi/2; \pi/2[$. Par bijectivité de la fonction t , on en déduit que $a = -b$. Soit $-\arctan(-x) = \arctan(x)$. Ainsi, la fonction $\arctan$ est impaire. ■

On peut aussi montrer directement que si $f: I \rightarrow J$ avec I et J deux intervalles symétriques par rapport à 0 et f bijective impaire, alors f^{-1} est aussi impaire.

2.7 Fonctions hyperboliques

Remarque 20. Pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on rappelle qu'il existe une unique fonction paire $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = p + i$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

	arccos	arcsin	arctan
Définie sur	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$
Image	$[0; \pi]$	$[-\pi/2; \pi/2]$	$] -\pi/2; \pi/2 [$
Valeur en -1	π	$-\pi/2$	$-\pi/4$
Valeur en 0	$\pi/2$	0	0
Valeur en 1	0	$\pi/2$	$\pi/4$
Monotonie	strict. décroissante	strict. croissante	strict. croissante
Parité		impair	impair
Continue sur	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$
Dérivable sur	$] -1; 1 [$	$] -1; 1 [$	$\mathbb{R}$
Fonction dérivée	$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

TABLE 3 – Résumé des propriétés des fonctions trigonométriques réciproques



Définition des fonctions cosinus et sinus hyperboliques

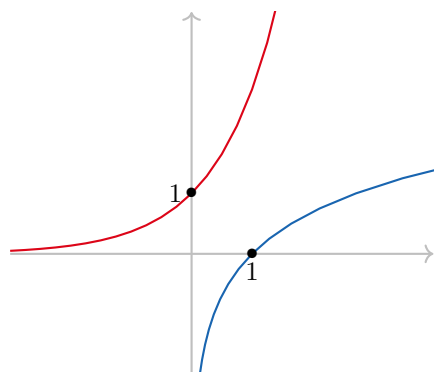
On définit le **cosinus hyperbolique** par $\text{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$ et le **sinus hyperbolique** par $\text{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$



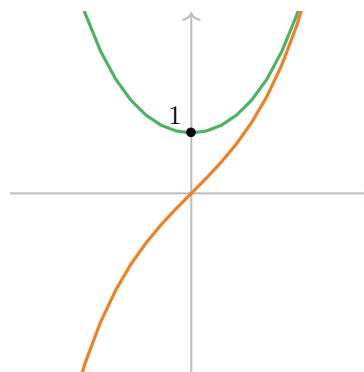
Proposition n° 15 : propriétés des fonctions hyperboliques

- sh est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\text{sh}' = \text{ch}$.
- ch est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\text{ch}' = \text{sh}$.
- $\text{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $\text{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$
- $\text{ch}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $\text{ch}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$
- sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $x > 0$, $\text{sh}(x) > 0$, pour tout $x < 0$, $\text{sh}(x) < 0$.
- ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geq 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

3 Représentation graphique des fonctions usuelles

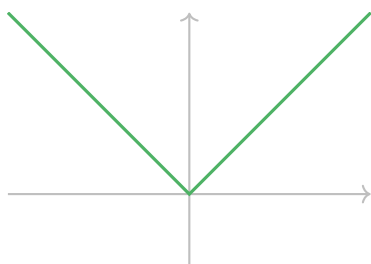


(a) Les fonctions **exponentielle** et **logarithme**

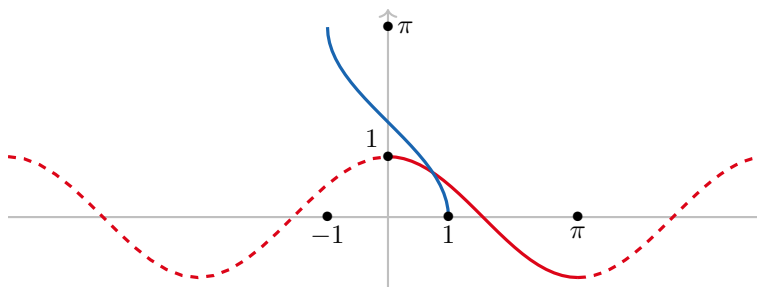


(c) Les fonctions **ch** et **sh**

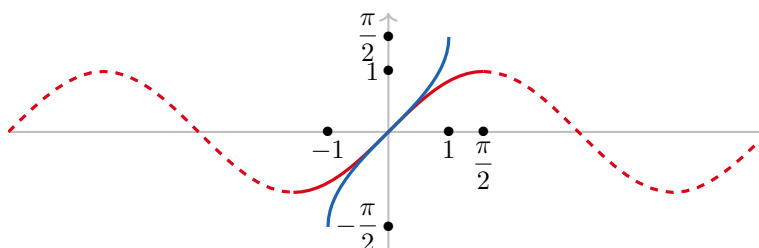
(b) Les fonctions puissances



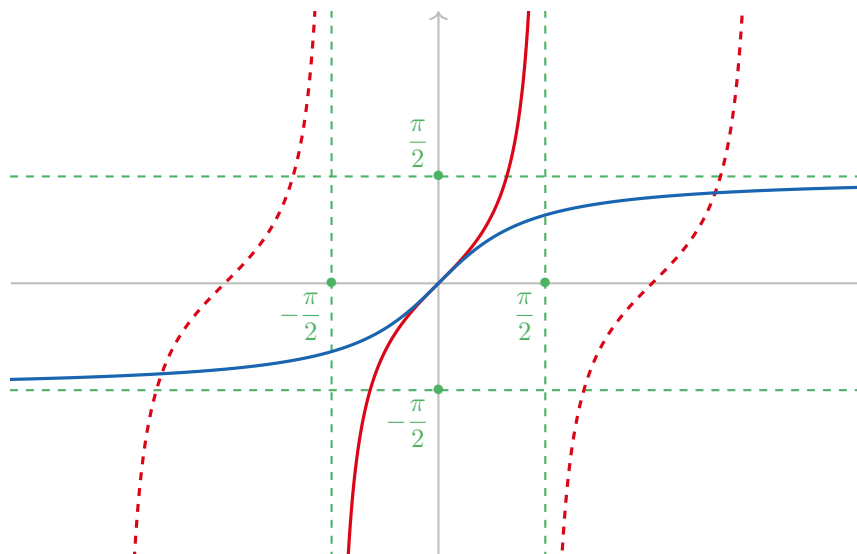
(d) La fonction valeur absolue



(e) La fonction **cosinus** et la fonction **arccos**



(f) La fonction **sinus** et la fonction **arcsinus**



(g) La fonction **tan** et la fonction **arctan**

FIGURE 3 – Si une fonction est bijective seulement sur une sous-partie de son domaine de définition on l'a tracé en trait plein sur cette sous partie et en pointillé en dehors.