

Équations/inéquations

Exercice 1 (★ Cal). Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

1. $x - 1 = \sqrt{x + 2}$
2. $\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{2x - 3} < 0$
3. $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x + 2} = 1$
4. $|3 - x| = x + 1$
5. $|x + 4| \leq |2x + 1|$
6. $\cos(x) \geq 1/2$
7. $\left| \frac{x - 1}{x + 3} \right| \leq 2$
8. $2^{x^2} = 3^{x^3}$
9. $2e^{4x} - 5e^{2x} + 2 = 0$
10. $2^{2x} - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x - 1}$
11. $\begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$
12. $\ln|x + 1| - \ln|2x + 1| \leq \ln 2$
13. $\text{sh}(x) \leq 2$
14. $\begin{cases} \text{ch}(x) + \text{ch}(y) = 4 \\ \text{sh}(x) + \text{sh}(y) = 1 \end{cases}$

Exercice 2 (♣★ Rai ©). Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Exercice 3 (★ Rai ©). Montrer que, si x et x' sont deux réels positifs tels que $x' \leq x$, $\sqrt{x + x'} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x'}$ et $\sqrt{x} - \sqrt{x'} \leq \sqrt{x - x'} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x'}$.

Étude de fonctions

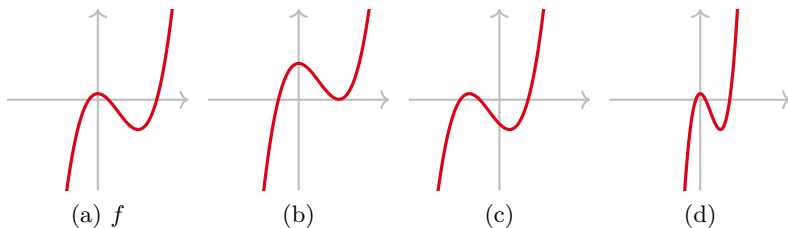


FIGURE 1 – Le graphe de la fonction f ainsi que d'autres fonctions issues de f .

Exercice 4 (★ Rai). Dans la figure 1, on a dessiné le graphe d'une fonction f ainsi que plusieurs fonctions fabriquées avec f . Retrouver l'expression de ces fonctions en fonction de f .

Exercice 5 (★ Cal). Déterminer le domaine de définition des fonctions ci-dessous et leur parité et leur éventuelle périodicité.

1. $x \mapsto x^3 - x$
2. $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$
3. $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$

Exercice 6 (★ Rai, Rep ©). On considère la fonction :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \cos^2(x) \end{cases}$$

1. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$ et expliquer comment obtenir toute la courbe représentative de f à partir de cette étude.
2. Pour x dans $\mathbb{R}$, calculer $f(\pi - x)$. Peut-on alors réduire l'intervalle d'étude ?

Exercice 7 (★ Cal). On pose $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Étudier les variations de la fonction f .

Exercice 8 (★ Rai, Rec, Com ©). Les fonctions suivantes sont-elles majorées ? Minorées ? Bornées ?

1. $x \mapsto e^x \cos(x)$
2. $x \mapsto \frac{-7 \sin(x^2) + 2 \cos(\sin(x))}{1 + e^x}$
3. $x \mapsto (1 + \cos x) \ln(1 + x^2)$
4. $x \mapsto x + \frac{42}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 9 (★★ Cal ©). Soit $f: x \mapsto \frac{3x - 2}{4x - 3}$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Justifier que f est une bijection entre deux ensembles à préciser et déterminer sa bijection réciproque.

On dit, dans ce cas, que f est une involution.

Exercice 10 (♣★ Cal, Rai). Étudier les limites en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ et de $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ ainsi que de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$ en $+\infty$.

Exercice 11 (★ Cal). À l'aide d'une fonction, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \quad \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

Exercice 12 (★★ Rai ©). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon. La fonction f est-elle périodique? Déterminer toutes ses périodes et donner sa période fondamentale si elle existe.

Exercice 13 (★ Rai ©). Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 5-périodique et 2-périodique. Montrer que f est 1-périodique.

Exercice 14 (★ Cal, Com). Donner l'ensemble de définition, justifier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions définies par :

1. $f(x) = \ln(2 + \cos(x))$
2. $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$
3. $h = \ln \circ \cos$
4. $i(x) = \sqrt{1 + \ln(1 - x)}$
5. $j(x) = \ln(\ln x)$
6. $k(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{x+1}{\cos^2(x)+3}\right)\right)$
7. $\ell(x) = \cos^5(x)$

Exercice 15 (★ Rai ©). Montrer que $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle à préciser. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 16 (★★ Rai ©). Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(x')| \leq \frac{3}{2}|x - x'|^{\frac{5}{2}}$. Montrer que f est constante.

Exercice 17 (★ Cal, Rai, Com). Soit f la fonction définie sur $]0; \pi]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (*c'est la fonction sinus cardinal utilisée en physique*).

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0; \pi]$ vers $[0; 1[$.
2. Indiquer le sens de variation de f^{-1} .
3. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $[0; 1[$ et calculer sa dérivée en 0.

Exercice 18 (★ Cal ©). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_\lambda(x) = \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$.

1. Montrer que toutes les tangentes de f_λ en $x = 0$ sont parallèles.
2. Montrer que toutes les tangentes en $x = 1$ sont concourantes.

Exercice 19 (★ Cal, Rai ©). Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Exercice 20 (★ Cal). On pose $f(x) = x^x$.

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f et étudier les variations de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

Exercice 21 (★ Cal). Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1$$

Fonctions trigonométriques, hyperboliques

Exercice 22 (★ Cal). En utilisant les dérivées, établir une relation entre les fonctions : $x \mapsto \arctan(e^x)$ $x \mapsto \arctan(\text{sh}(x))$

Exercice 23 (★ Cal, Rai, Rec ©). 1. Démontrer que $\text{sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective.

2. Démontrer que ch réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un ensemble à déterminer.

3. Démontrer que $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à déterminer.

On note argsh , argch et argth les bijections réciproques de sh , ch (restreinte à $\mathbb{R}_+$) et th .

4. ★★ Étudier la dérivabilité argsh , argch et argth .

5. ★★★ Trouver une expression explicite argsh , argch et argth utilisant le logarithme.

Exercice 24 (★ Cal ©). Résoudre les équations ou inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $\sin(x) + \sin(2x) = 0$
2. $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$
3. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$
4. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 < 0$
5. $\cos\left(\frac{7\pi}{5} - x\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5} + 3x\right)$

Pour le 3., utiliser : $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Exercice 25 (★ Cal). Calculer

1. $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$
2. $\arccos(\cos(4\pi))$
3. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
4. $\arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

Exercice 26 (★ Cal). On pose $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression simplifiée de f .

Exercice 27 (★ Cal). Démontrer les égalités suivantes :

1. $\forall x \in [-1; 1] \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 28 (★ Cal). On souhaite résoudre l'équation, notée (E), $\arccos(x) = \arcsin(2x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Si x solution de (E), montrer que $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ puis que $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
2. Soit $x \in [-1; 1]$. Vérifier que $\sin(\arccos(x)) \geq 0$.
3. Soit $x \in [-1; 1]$. Montrer que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
4. Dédurre des résultats précédents que si x est solution de (E) alors $\sqrt{1-x^2} = 2x$.
5. Résoudre l'équation (E).

Exercice 29 (★ Cal ©). Montrer que $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$.

Exercice 30 (★ Cal). Démontrer que pour tout $x \geq 0$, $\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2 \arctan(\sqrt{x})$.

Exercice 31 (★ Cal). Simplifier les expressions suivantes après avoir précisé l'intervalle de définition :

1. $\cos(2 \arccos(x))$
2. $\cos(\arcsin(x))$
3. $\tan(\arccos(x))$
4. $\cos(\arctan(x))$

Exercice 32 (★ Cal). Résoudre les équations suivantes après avoir précisé les domaines de définitions :

1. $\arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right) = x$
2. $\arctan(3x) + \arctan(10x) = \frac{3\pi}{4}$
3. $\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{16}{25}\right) + \arcsin\left(\frac{9}{16}\right)$

Exercice 33 (★ Cal ©). 1. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^n = \text{ch}(nx) + \text{sh}(nx)$