

Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, en développant, par identité remarquable, on a $|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \geq 0$, soit $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Correction de l'exercice 3. • On remarque que

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x'})^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{x'} + x' \geq x + x'$$

On applique donc la fonction racine carrée, qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ainsi $\sqrt{x + x'} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x'}$.

- De plus, comme $x' \geq 0$, $x - x' \leq x + x'$, par croissance de la racine carrée :

$$\sqrt{x - x'} \leq \sqrt{x + x'} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x'}$$

Donc $\sqrt{x - x'} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x'}$

- En outre, $\sqrt{x} = \sqrt{(x - x') + x'} \leq \sqrt{x - x'} + \sqrt{x'}$, ainsi, $\sqrt{x} - \sqrt{x'} \leq \sqrt{x - x'}$

On a donc bien montré toutes les inégalités demandées.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6. 1. Remarquons que f est impaire, en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \sin(-x) \cos^2(-x) = -\sin(x) \cos^2(x)$ (par imparité du sinus et parité du cosinus). Si on étudie f sur $[0; \pi]$, alors par symétrie par rapport à 0, on obtiendra f sur $[-\pi; 0]$ et donc sur $[-\pi; \pi]$, intervalle de longueur 2π . Or f est 2π périodique, en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) \cos^2(x + 2\pi) = \sin(x) \cos^2(x) = f(x)$. Ainsi, par translation, on obtiendra le graphe de f sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x) = \sin(\pi - x) \cos(\pi - x)^2 = \sin(x)(-\cos(x))^2 = f(x)$. Ainsi, si on étudie f sur $[0; \pi/2]$ par symétrie verticale d'axe $x = \pi/2$, on obtient f sur $[\pi/2; \pi]$ et donc sur $[0; \pi]$.

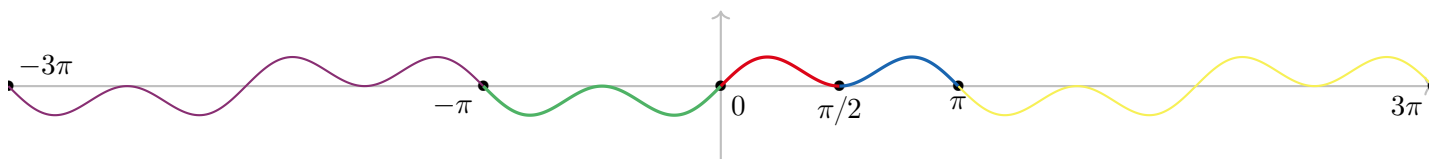


FIGURE 1 – La partie en rouge est la partie étudiée. Par symétrie verticale d'axe $x = \pi/2$, on en déduit la partie en bleu. Par symétrie axiale, on en déduit la partie en vert. Par translation de 2π , on en déduit les parties jaune et violet.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8. 1. Posons $f: x \mapsto e^x \cos(x)$. Supposons que f soit majorée. Alors, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2n\pi) \leq M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{2n\pi} \leq M$. Or $e^{2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc cette suite ne peut pas être bornée. Ceci est donc une contradiction. Ainsi, f n'est pas majorée. Supposons que f soit minorée. Alors, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \leq f(x)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq f(2n\pi + \pi)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq -e^{2n\pi + \pi}$, d'où $e^{2n\pi + \pi} \leq -m$. Or $e^{2n\pi + \pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, donc cette suite ne peut pas être bornée. Ceci est donc une contradiction. Ainsi, f n'est pas minorée.

2. Posons $g: x \mapsto \frac{-7 \sin(x^2) + 2 \cos(\sin(x))}{1 + e^x}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|g(x)| = \frac{|-7 \sin(x^2) + 2 \cos(\sin(x))|}{|1 + e^x|} \leq \frac{|7 \sin(x^2)| + |2 \cos(\sin(x))|}{1 + e^x} \leq \frac{7 + 2}{1} = 9$$

Ainsi, la fonction g est bornée.

3. Posons $h: x \mapsto (1 + \cos(x)) \ln(1 + x^2)$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \cos(x) \geq 0$ et $\ln(1 + x^2) \geq \ln(1) = 0$, par produit, $h(x) \geq 0$. Ainsi, h est minorée par 0. Supposons que h soit majorée, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \leq M$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(2n\pi) \leq M$, donc $2 \ln(1 + 4n^2\pi^2) \leq M$. Or, $\ln(1 + 4n^2\pi^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, on a donc une contradiction. Ainsi, h n'est pas majorée.
4. Posons $i: x \mapsto x + \frac{42}{x}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $i(x) > 0$. La fonction i est minorée par 0. Cependant, $i(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, ainsi i n'est pas majorée.

Correction de l'exercice 9. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction est définie en x ssi $4x - 3 \neq 0$ ssi $x \neq 3/4$. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{3/4\}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{3/4\}$. Soit $y \in \mathbb{R}$, alors :

$$y = f(x) = \frac{3x - 2}{4x - 3} \iff (4x - 3)y = (3x - 2) \iff x(4y - 3) = 3y - 2$$

Il y a alors deux cas :

- Si $4y - 3 = 0$, c'est-à-dire si $y = 3/4$, alors $3y - 2 = 1/4$, ainsi l'équation, d'inconnue x , $x(4y - 3) = 3y - 2$ n'a pas de solution et donc l'équation $y = f(x)$ n'a pas de solution
- Si $4y - 3 \neq 0$, alors d'après ce qui précède, $y = f(x)$ ssi $x = \frac{3y - 2}{4y - 3}$. De plus, si $x = \frac{3y - 2}{4y - 3}$, alors

$$x \neq 3/4 \text{ (si } \frac{3y - 2}{4y - 3} = 3/4, \text{ alors } 4(3y - 2) = 3(4y - 3) \text{ et donc } -8 = -9 \text{ ce qui est impossible)}$$

On a ainsi montré que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{3/4\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{3/4\}$, car pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{3/4\}$, on a trouvé un unique $x \in \mathbb{R} \setminus \{3/4\}$ et $x = \frac{3y - 2}{4y - 3}$, ainsi $f^{-1}: y \mapsto \frac{3y - 2}{4y - 3}$. On remarque que $f = f^{-1}$.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. Soit T une période de f , alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$. En particulier, pour $x = 0$, $f(T) = f(0) = 1$, ainsi, $T \in \mathbb{Q}$. De plus, $T > 0$, ainsi $T \in \mathbb{Q}_+^*$. Réciproquement, soit $T = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+^*$

avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $x = \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$ avec $(p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, alors $x + T = \frac{pq' + p'q}{qq'} \in \mathbb{Q}$.

Si $x + T = \frac{p''}{q''} \in \mathbb{Q}$ avec $(p'', q'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, alors

$$x = (x + T) - T = \frac{p''}{q''} - \frac{p}{q} = \frac{p''q - pq''}{qq''} \in \mathbb{Q}$$

Ainsi, on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Q}$ ssi $x + T \in \mathbb{Q}$, par contraposée, on a aussi $x \notin \mathbb{Q}$ ssi $x + T \notin \mathbb{Q}$. Ainsi, si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x + T \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1 = f(x + T)$, si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $x + T \notin \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0 = f(x + T)$, ainsi, f est périodique de période T . Ainsi, l'ensemble des périodes de f est $\mathbb{Q}_+^*$. Supposons que f admette une période fondamentale notée T , alors $T \in \mathbb{Q}_+^*$, remarquons que $T/2 \in \mathbb{Q}_+^*$. Comme T est la plus petite période, $T/2$ est une période de f , ainsi $T \leq T/2$ donc $1 \leq 1/2$ ce qui est absurde. Par conséquent, on a montré que f n'admettait pas de période fondamentale.

Correction de l'exercice 13. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + 1) \underset{f \text{ 2-périodique}}{=} f((x + 1) + 2) = f(x + 3) \underset{f \text{ 2-périodique}}{=} f((x + 3) + 2) = f(x + 5) \underset{f \text{ 5-périodique}}{=} f(x)$$

Ainsi, f est 1-périodique.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15. L'application $x \mapsto x^2 - 1$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. En outre $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, par composée de deux applications strictement croissante, f est strictement croissante sur $^1 [1; +\infty[$.

De plus, par composée de fonctions continues, f est continue sur $[1; +\infty[$. Ainsi, f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers $\left[f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [0; +\infty[$. Soit $y \in [0; +\infty[$, alors il existe un unique $x \in [1; +\infty[$ tel que $y = f(x)$, ainsi $y^2 = x^2 - 1$, donc $x^2 = y^2 + 1$ donc $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2 + 1}$. Or $x \geq 0$ donc $\sqrt{x^2} = x$. Dès lors, $x = \sqrt{y^2 + 1}$, Par conséquent ², $f^{-1} \begin{cases} [0; +\infty[\longrightarrow [1; +\infty[\\ y \longmapsto \sqrt{y^2 + 1} \end{cases}$.

Correction de l'exercice 16. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \neq a$, en divisant par $|x - a|$, on a $\frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq \frac{3}{2}|x - a|^{\frac{3}{2}}$, soit

$$-\frac{3}{2}|x - a|^{\frac{3}{2}} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{3}{2}|x - a|^{\frac{3}{2}}$$

Comme $\frac{3}{2}|x - a|^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, par théorème d'encadrement, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Dès lors, f est dérivable en a et $f'(a) = 0$. Et ce pour tout $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18. 1. Remarquons que $x \mapsto x + \lambda$ et $x \mapsto x^2 + 1$ sont toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - 2x(x + \lambda)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x\lambda + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Ainsi, l'équation de la tangente de f_λ en 0 est $x \mapsto f(0) + f'(0)(x - 0) = \lambda + x$. Donc, les tangentes aux courbes de f_λ en $x = 0$ sont parallèles (car ont toutes le même coefficient directeur).

2. En revanche, l'équation de la tangente de f_λ en 1 est

$$T_\lambda: x \mapsto f(1) + f'(1)(x - 1) = \frac{1 + \lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}(x - 1) = 1 + \lambda - \frac{\lambda}{2}x$$

On remarque alors que $T_\lambda(2) = 1$. Ainsi, toutes les tangentes de f_λ en 1 sont concourantes au point $(2, 1)$.

Correction de l'exercice 19. Pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\iff e^{\sqrt{x} \ln(x)} = e^{x \ln(\sqrt{x})} &\iff \sqrt{x} \ln(x) = \frac{x}{2} \ln(x) \\ &\iff \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) \ln(x) = 0 &\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{x}{2} &\iff_{x \geq 0} \ln(x) = 0 \text{ ou } x = \frac{x^2}{4} \\ &\iff_{x \neq 0} x = 1 \text{ ou } 1 = \frac{x}{4} &\iff x = 1 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

La deuxième équivalence est justifiée par le fait qu'on puisse passer une égalité par la fonction exponentielle ou la fonction logarithme.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.

1. Dériver f serait une mauvaise idée, dans la mesure où la racine carrée n'est pas dérivable en 0, on ne peut dériver f en 1 par la formule de dérivée de la composée.

2. Ou bien $f^{-1} \begin{cases} [0; +\infty[\longrightarrow [1; +\infty[\\ x \longmapsto \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$, si on n'aime pas les fonctions dont y est la variable (muette).