

DS1

19 septembre 2026

Consignes

- L'usage de calculatrice, de documents de téléphone, de montre intelligente (sic) est interdit.
- La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation.
- Les résultats de chaque question seront encadrés.
- Vous pouvez faire les exercices et problèmes dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer quel exercice et quel problème vous êtes en train de traiter.
- Au sein d'un problème ou d'un exercice, il faut essayer, autant que possible, de traiter les questions dans l'ordre.

Problème 1 : la fonction de Lambert Wilson

Le but de l'exercice est de définir la fonction de Lambert et d'étudier certaines de ses propriétés. On considère dans tout ce problème, l'application :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto xe^x \end{cases}$$

1. Déterminer les variations de f (en terme de stricte monotonie) ainsi que les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Donner les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points abscisse 0 et -1 .
3. Soit $k: I \rightarrow J$ une fonction. Avec des quantificateurs, donner la définition de k bijective.
4. Justifier que l'application $g: \begin{cases} [-1; +\infty[\longrightarrow [-e^{-1}; +\infty[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection.

Dans la suite du sujet, la bijection réciproque de g est notée W .

5. Justifier que W est dérivable sur $]-e^{-1}; +\infty[$.
6. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.
7. Donner les équations des tangentes à la courbe de W au point d'abscisse 0 et $-e^{-1}$.
8. Tracer soigneusement sur un grand graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f et la courbe $\mathcal{C}_W$ représentant W , les tangentes de f en 0 et -1 , ainsi que celles de W en 0 et en $-e^{-1}$.
9. Prouver que

$$\forall x \in]-e^{-1}; +\infty[\setminus \{0\} \quad W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

10. Démontrer que l'application $h: \begin{cases}]-\infty; -1] \longrightarrow [-e^{-1}; 0[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V .

W et V sont appelées les deux branches de la fonction de Lambert et elles ne s'expriment pas à l'aide de fonctions usuelles.)

11. Pour un paramètre réel m , on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$xe^x = m \tag{E}$$

Déterminer, en fonction de m , le nombre de solutions de (E). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W .

12. Pour des paramètres réels non nuls a et b , on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{ax} + bx = 0 \tag{F}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b , le nombre de solutions de l'équation (F). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W .

Problème 2 : il va falloir tourner en rond sans devenir fou irrationnel !

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, ainsi f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Dans ce problème, on pourra utiliser sans preuve que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Calculer l'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction f .
2. Déterminer le ou les antécédents de $\frac{1}{2}$ par la fonction f .
3. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
4. Étudier la parité/imparité de f .
5. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
 - (a) f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
 - (b) f n'est pas une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
 - (c) f est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
 - (d) f n'est pas une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
6. À l'aide de la question précédente, justifier que f n'est ni croissante sur $\mathbb{R}$ ni décroissante sur $\mathbb{R}$.
7. Dresser le tableau de variation f .
8. Représenter f dans un repère orthonormé.
9. Donner la définition, avec des quantificateurs, de $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
10. Démontrer que f est bornée.
11. Montrer que f n'est pas périodique.
12. Soit $h: I \rightarrow J$. Donner la définition de l'image de h notée $h(I)$.

Pour tout $x \geq 1$, on pose $g(x) = f(x)$. La fonction f est ainsi définie sur $\mathbb{R}$, tandis que la fonction g est définie sur $[1; +\infty[$.

13. Montrer que g est une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle à déterminer.
14. Déterminer la bijection réciproque de g , notée g^{-1} .
15. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
16. Rappeler, sans preuve, l'ensemble de définition de $\tan$.
17. Donner deux formules de la dérivée de $\tan$ (en précisant bien sûr sur quel ensemble ces formules sont valables).
18. Soit $x \in \mathbb{R}$, on suppose que x et $\frac{x}{2}$ sont dans l'ensemble de définition de $\tan$, Montrer que

$$\cos(x) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \tan(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On dit qu'un point de coordonnées (x, y) est birationnel si x et y sont tous les deux rationnels.

19. Montrer que le point de coordonnées $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est un point birationnel appartenant au cercle trigonométrique.
20. Donner, en justifiant, un exemple de point du cercle trigonométrique qui n'est pas birationnel.
21. Démontrer que le cercle trigonométrique contient une infinité de points birationnels.

Exercice 1 : trouver le bon raisonnement pour répondre à la grande question sur la vie, l'univers et le reste

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$ où $g(0) = g(42) = 0$ et $h: x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$ où a et b sont des réels.

Exercice 2 : Soyez aussi fonctionnel que cette équation !

Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall x' \in \mathbb{R} \quad f(x - f(x')) = 2 - x - x'$$

Exercice 3 : le football se joue à 11 et la fin, c'est l'exponentielle qui gagne

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ pour $n \geq 1$ et que $0! = 1$ (par convention). Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$e^x \geq \sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!}$$