

Problème 1 : la fonction de Lambert Wilson

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

Ainsi, pour tout $x \geq -1$, $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = -1$. Ainsi, sur $[-1; +\infty[$, f' est positive et ne s'annule qu'une seule fois, donc f est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$. De même, pour tout $x \leq -1$, $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = -1$, donc, sur $]-\infty; -1]$, f' est négative et ne s'annule qu'une seule fois, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$. Par produit de limites infinies, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De plus, par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

- Pour $a = 0$ alors l'équation devient $y = f'(0)x + f(0) = x$.
- Pour $a = -1$ alors l'équation devient $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = -e^{-1}$.

3. On dit que $k: I \rightarrow J$ est bijective si

$$\forall y \in J \quad \exists ! x \in I \quad y = k(x)$$

4. La fonction g est strictement croissante et continue (car dérivable) sur $[-1; +\infty[$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, g est une bijection de $[-1; +\infty[$ sur l'intervalle

$$g([-1; +\infty[) = \left[g(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[= [-e^{-1}; +\infty[$$

5. Soit $x \in]-e^{-1}; +\infty[$, alors $x > -e^{-1}$, en appliquant, la fonction W qui est strictement croissante (d'après le théorème de la bijection strictement monotone), $W(x) > W(-e^{-1}) = -1$, ainsi, g est dérivable en $W(x)$ et $g'(W(x)) > 0$. D'après le théorème de la dérivation de la bijection réciproque, W est dérivable en x . Ainsi, W est dérivable sur $]-e^{-1}; +\infty[$.

6. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $0 = g^{-1}(0) = W(0)$. D'après le théorème de la dérivation de la bijection réciproque :

$$W'(0) = \frac{1}{g'(W(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

7. • L'équation de la tangente à la courbe de W au point d'abscisse 0 est $y = W'(0)x + W(0) = x$.

- La tangente à la courbe de W au point d'abscisse $-e^{-1}$ est verticale d'équation $x = -e^{-1}$.
(car celle de f est horizontale au point $x = -1$ de hauteur $-e^{-1}$)

8. La courbe de W est la symétrique de la courbe de f sur $[-1; +\infty[$.

9. Comme W est dérivable sur $]-e^{-1}; +\infty[$ (question 5), on rappelle que pour tout $x \in]-e^{-1}; +\infty[$:

$$W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))} = \frac{1}{(W(x) + 1)e^{W(x)}}$$

Mais pour tout $x \in]-e^{-1}; +\infty[\setminus \{0\}$, $g(W(x)) = x$ soit $W(x)e^{W(x)} = x$ ou encore $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$ soit :

$$W'(x) = \frac{1}{(W(x) + 1) \frac{x}{W(x)}} = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}$$

10. L'application h est strictement décroissante et continue sur $]-\infty; -1]$, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, h réalise donc une bijection de l'intervalle $]-\infty; -1]$ sur l'intervalle $h(]-\infty; -1]) = [-e^{-1}; 0]$.

11. On étudie l'équation $f(x) = m$. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions :

- Si $m < -e^{-1}$, $\mathcal{S} = \emptyset$: zéro solution.

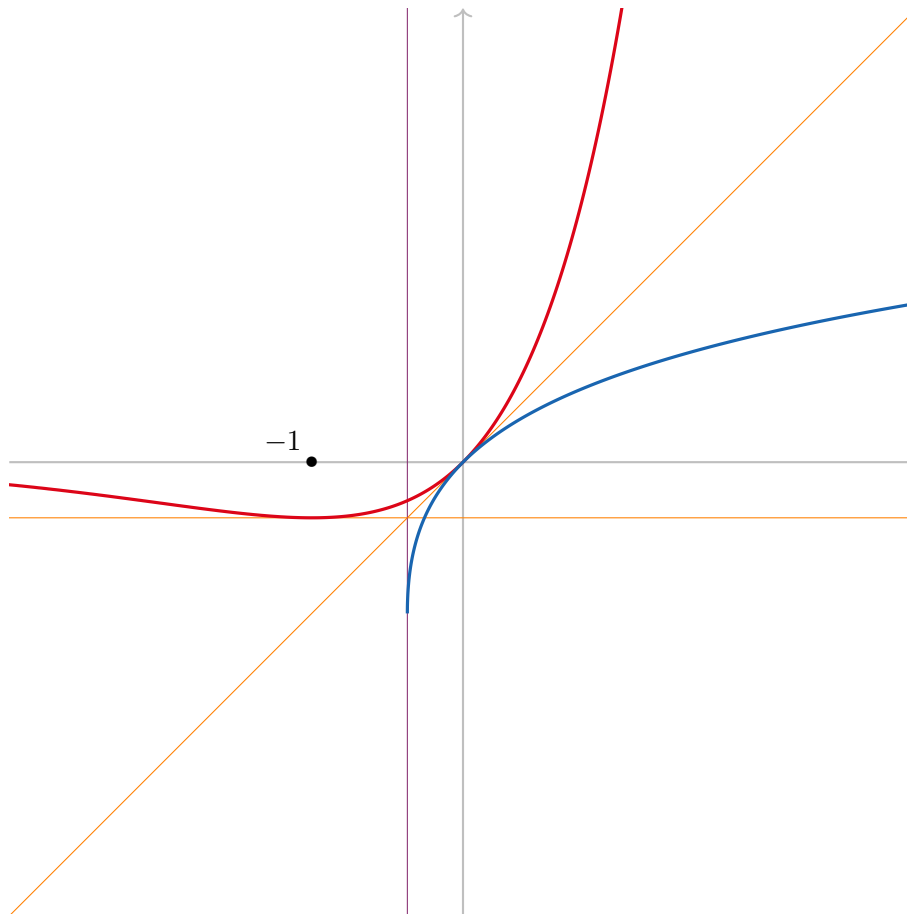


FIGURE 1 – En rouge, la courbe de f , en bleu, la courbe de W , la droite horizontale en orange est la tangente de f en -1 , la droite horizontale en orange est la tangente de f et 0 ainsi que la tangente de W en 0 , la droite violette est la tangente de W en $-e^{-1}$.

- Si $m = -e^{-1}$, $\mathcal{S} = \{-1\} = \{V(-e^{-1})\} = \{W(-e^{-1})\}$: une seule solution.
- Si $-e^{-1} < m < 0$, $\mathcal{S} = \{V(m), W(m)\}$: deux solutions.
- Si $m \geq 0$, $\mathcal{S} = \{W(m)\}$: une seule solution.

12. Soit a et b deux réels non nuls. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$e^{ax} + bx = 0 \iff 1 + bxe^{-ax} = 0 \iff xe^{-ax} = -\frac{1}{b} \iff -axe^{-ax} = \frac{a}{b} \iff f(-ax) = \frac{a}{b}$$

Notons $\hat{\mathcal{S}}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation, alors en utilisant la question 11, on en déduit alors :

- Si $\frac{a}{b} < -e^{-1}$, $\hat{\mathcal{S}} = \emptyset$
- Si $\frac{a}{b} = -e^{-1}$, $\hat{\mathcal{S}} = \{\frac{1}{a}\}$
- Si $-e^{-1} < \frac{a}{b} < 0$, $\hat{\mathcal{S}} = \left\{-\frac{1}{a}V\left(\frac{a}{b}\right), -\frac{1}{a}W\left(\frac{a}{b}\right)\right\}$
- Si $\frac{a}{b} \geq 0$, $\hat{\mathcal{S}} = \left\{-\frac{1}{a}W\left(\frac{a}{b}\right)\right\}$.

Problème 2 : il va falloir tourner en rond sans devenir fou irrationnel !

$$1. \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}. \quad \boxed{\text{L'image de } \frac{1}{2} \text{ par } f \text{ vaut } \frac{4}{5}.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2} &\iff \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \iff 2x = \frac{1+x^2}{2} \iff 4x = 1+x^2 \\ &\iff x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x = \frac{4+\sqrt{12}}{2} \text{ ou } x = \frac{4-\sqrt{12}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, les antécédents de $\frac{1}{2}$ par f sont $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$.

Remarque 1. Puisque $\frac{1}{2}$ a deux antécédents pour la fonction f , f n'est pas bijective.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors,

$$f(x) = \frac{2x}{x^2(1+x^{-2})} = \frac{2}{x(1+x^{-2})}$$

Or, $(1+x^{-2}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, ainsi, par un produit de limites, $x(1+x^{-2}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Par passage à l'inverse, on en déduit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

4. L'ensemble $\mathbb{R}$ est bien centré en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par parité de la fonction carrée :

$$f(-x) = \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{2x}{1+x^2} = -f(x)$$

Ainsi, La fonction f est impaire.

5. (a) $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq x' \implies f(x) \leq f(x')$.
 (b) $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq x' \text{ et } f(x) > f(x')$
 (c) $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq x' \implies f(x) \geq f(x')$.
 (d) $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq x' \text{ et } f(x) < f(x')$

6. Posons $x = 1 \in \mathbb{R}$ et $x' = 2 + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$, ainsi, $x \leq x'$ et

$$f(x) = f(1) = 1 > \frac{1}{2} = f(2 + \sqrt{3}) = f(x')$$

Par conséquent, on a montré qu'il existe $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq x'$ et $f(x) > f(x')$.

Donc, La fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

Posons $x = 0 \in \mathbb{R}$ et $x' = 1 \in \mathbb{R}$, ainsi, $x \leq x'$ et

$$f(x) = f(0) = 0 < 1 = f(1) = f(x')$$

On a montré qu'il existe $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq x'$ et $f(x) < f(x')$.

Par conséquent, La fonction f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

7. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - (2x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

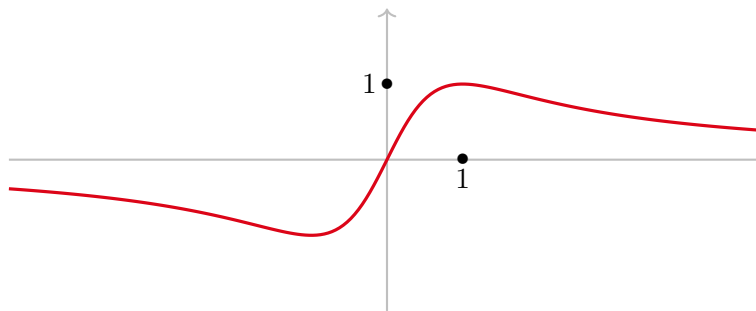
Remarquons que $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = -1$. Ainsi, pour $x \in [-1; 1]$, $1 - x^2 \geq 0$ et donc $f'(x) \geq 0$, f est strictement croissante sur $[-1; 1]$. Pour $x \geq 1$ ou $x \leq -1$, $1 - x^2 \leq 0$ et donc $f'(x) \leq 0$, f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$.

8.

9. On dit que h est bornée sur $\mathbb{R}$ si

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad m \leq h(x) \leq M$$

10. Soit $x \in \mathbb{R}$, distinguons les cas :



- Si $x \geq 1$, alors comme f est décroissante sur $[1; +\infty[$, $f(x) \leq f(1) = 1$, de plus, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \geq 0$, ainsi $0 \leq f(x) \leq 1$.
- Si $-1 \leq x \leq 1$, f étant croissante sur $[-1; 1]$, $f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$, donc $-1 \leq f(x) \leq 1$
- Si $x \leq -1$, alors comme f est décroissante sur $]-\infty; -1]$, $f(x) \geq f(-1) = -1$, de plus, $f(x) \leq 0$, donc $-1 \leq f(x) \leq 0$

Ainsi, dans tous les cas, $-1 \leq f(x) \leq 1$. Posons $m = -1$ et $M = 1$, ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \leq f(x) \leq M$. Par conséquent, on a montré qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \leq f(x) \leq M$. La fonction f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2. On pouvait aller plus vite, en écrivant¹ que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1 - |x|)^2 \geq 0$, et donc $1 - 2|x| + x^2 \geq 0$, ainsi, $2|x| \leq 1 + x^2$ dès lors, $|f(x)| \leq 1$ et f est ainsi bornée.

11. Présentons deux méthodes :

- Supposons que f soit périodique. Ainsi, il existe $T > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$. En particulier, pour $x = 0$, $f(T) = f(0) = 0$. Dès lors, $\frac{2T}{1+T^2} = 0$, en multipliant par $1 + T^2$, on en déduit que $T = 0$, ce qui est absurde. On a ainsi montré que f n'est pas périodique.
- Supposons que f soit périodique. Ainsi, il existe $T > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$. En particulier, pour $x = 1$, $f(T + 1) = f(1)$. Comme $T > 0$, $T + 1 > 1$, or f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, donc $f(T + 1) < f(1)$. Ce qui est une contradiction. On a ainsi montré que f n'est pas périodique.

12. $h(I) = \{h(x) \mid x \in I\}$

13. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, ainsi d'après le théorème de la bijection strictement croissante, g est une bijection de $[1; +\infty[$ vers

$$g([1; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(1) \right] =]0; 1]$$

14. Soit $y \in]0; 1]$. Comme $g: [1; +\infty[\rightarrow]0; 1]$ est bijective, il existe un unique $x \in [1; +\infty[$ tel que $y = g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, ainsi, $(1+x^2)y = 2x$ soit $yx^2 - 2x + y = 0$, comme $y > 0$, x est solution d'une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4y^2$. Distinguons les cas :

- Si $y = 1$, alors $\Delta = 0$ et $x = \frac{2}{2y} = 1$.
- Si $y \in]0; 1[$. Comme $0 < y < 1$ et que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $0^2 < y^2 < 1^2$, ainsi, $\Delta > 0$. Dès lors,

$$x = \frac{2 + \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2 - \sqrt{4 - 4y^2}}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$$

Notons $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$ et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$, comme $\sqrt{1 - y^2} > 0$, $1 + \sqrt{1 - y^2} > 1$, comme

$0 < y < 1$, $\frac{1}{y} > 1$ (la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), par produit $x_1 > 1$. De

plus, $x_1 x_2 = \frac{y}{y} = 1$, donc $x_2 = \frac{1}{x_1} < 1$.

Comme $x > 1$, on en déduit que $x = x_2$ est impossible, dès lors, $x = x_1$.

1. Méthode vue dans l'exercice 2 du TD2.

Remarquons que si $y = 1$, alors l'équation $x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$ est encore vraie. Dès lors, pour tout $y \in]0; 1]$, l'unique $x \in [1; +\infty[$ tel que $y = g(x)$ vérifie $x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$.

$$\text{Par conséquent, } g^{-1}: \begin{cases}]0; 1] \longrightarrow [1; +\infty[\\ y \longmapsto \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \end{cases}.$$

Remarque 3. Si on préfère, on peut écrire $g^{-1}: \begin{cases}]0; 1] \longrightarrow [1; +\infty[\\ x \longmapsto \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \end{cases}$

15. $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ et $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

16. L'ensemble de définition de $\tan$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. On peut aussi noter cet ensemble de définition par :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

17. $\tan$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

18. En écrivant $\tan$ comme $\frac{\sin}{\cos}$ puis en multipliant par $\cos^2$ et en utilisant la formule de $\cos(2\theta)$ avec $\theta = \frac{x}{2}$, on obtient :

$$\frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos\left(2\frac{x}{2}\right)}{1} = \cos(x)$$

En écrivant $\tan$ comme $\frac{\sin}{\cos}$ puis en multipliant par $\cos^2$ et en utilisant la formule de $\sin(2\theta)$ avec $\theta = \frac{x}{2}$, on obtient :

$$\frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)}{1} = \sin(x)$$

En écrivant que $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, on obtient :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

19. $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$ sont bien des rationnels. Si on note M le point de coordonnées $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ et O l'origine du repère, alors

$$OM^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$$

Ainsi, le point de coordonnées $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est bien un point birationnel appartenant au cercle trigonométrique.

20. Comme $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, le point de coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est bien sur le cercle trigonométrique. De plus, si $\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, alors il existe p et q deux entiers non nuls (car $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$) tels que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q}$, donc $\sqrt{2} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible. Donc $\frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Ainsi, le point de coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est sur le cercle trigonométrique mais n'est pas birationnel.

21. Soit un entier $n \geq 2$, comme $\tan$ réalise une bijection de $] -\pi/2; \pi/2[$ vers $\mathbb{R}$, il existe un unique $t \in] -\pi/2; \pi/2[$ tel que $n = \tan(t)$. Notons $x = 2t$. D'après la question 18,

$$\sin(x) = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{2n}{1 + n^2} = g(n)$$

De même, $\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1 - n^2}{1 + n^2}$. Ainsi le point de coordonnées

$$(\cos(x), \sin(x)) = \left(\frac{1 - n^2}{1 + n^2}, \frac{2n}{1 + n^2}\right)$$

est bien un point birationnel du cercle trigonométrique (car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$). De plus, g est une bijection de $[1; +\infty[$ vers $]0; 1]$, ainsi si n et m sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2 avec $n \neq m$, alors $g(n) \neq g(m)$, autrement dit les points de coordonnées $\left(\frac{1 - n^2}{1 + n^2}, \frac{2n}{1 + n^2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, ont tous des ordonnées différentes donc ce sont des points deux à deux distincts et ceux sont des points birationnels du cercle trigonométrique.

Il existe une infinité de points à coordonnées birationnels sur le cercle trigonométrique.

Remarque 4. Comme le point $(\cos(x), \sin(x))$ est sur le cercle trigonométrique, on a

$$\left(\frac{1 - n^2}{1 + n^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{1 + n^2}\right)^2 = 1$$

En multipliant par $(1 + n^2)^2$, on obtient, $(1 - n^2)^2 + (2n)^2 = (1 + n^2)^2$ (et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$) ce qui prouve qu'il existe un nombre infini de triplets Pythagoricien. On a fait le lien ici entre deux choses a priori différentes, les points birationnels du cercle trigonométrique et les triplets d'entiers (a, b, c) vérifiant $c^2 = a^2 + b^2$.

Exercice 1 : trouver le bon raisonnement pour répondre à la grande question sur la vie, l'univers et le reste

Raisonnons par analyse-synthèse :

- **Analyse** : supposons qu'il existe g et h deux fonctions telles que $f = g + h$ avec $g(0) = g(42) = 0$ et $h: x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$ avec a et b des réels. Alors,

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0) + h(0) = 0 + a = a \\ f(42) &= g(42) + h(42) = a \cos(42) + b \sin(42) \end{aligned}$$

Ainsi, $b \sin(42) = f(42) - f(0) \cos(42)$. Supposons que $\sin(42) = 0$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $42 = k\pi$, ainsi nécessairement, $k \neq 0$ et $\pi = \frac{42}{k} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car π est irrationnel. Par conséquent,

$\sin(42) \neq 0$ et $b = \frac{f(42) - f(0) \cos(42)}{\sin(42)}$ Dès lors, $h: x \mapsto f(0) \cos(x) + \frac{f(42) - f(0) \cos(42)}{\sin(42)} \sin(x)$.
De plus, comme $f = g + h$, on obtient :

$$g: x \mapsto f(x) - f(0) \cos(x) - \frac{f(42) - f(0) \cos(42)}{\sin(42)} \sin(x)$$

- **Synthèse** : posons les deux fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$g: x \mapsto f(x) - f(0) \cos(x) - \frac{f(42) - f(0) \cos(42)}{\sin(42)} \sin(x) \text{ et}$$

$$h: x \mapsto f(42) \cos(x) + \frac{f(42) - f(0) \cos(42)}{\sin(42)} \sin(x)$$

Ainsi, il existe bien $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h: x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$. De plus,

$$g(0) = f(0) - f(0) \times 1 + \frac{f(42) - f(0) \cos(42)}{\sin(42)} \times 0 = 0$$

$$g(42) = f(42) - f(0) \cos(42) - \frac{f(42) - f(0) \cos(42)}{\sin(42)} \sin(42) = 0$$

La synthèse montre qu'il existe g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $g(0) = g(42) = 0$ et $h: x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f = g + h$. L'analyse nous a permis de montrer que g et h sont uniques.

Exercice 2 : Soyez aussi fonctionnel que cette équation !

Raisonnons par analyse-synthèse :

- **Analyse** : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall x' \in \mathbb{R} \quad f(x - f(x')) = 2 - x - x'$$

Fixons $X \in \mathbb{R}$ et cherchons la valeur de $f(X)$: prenons $x = X + f(0)$ et $x' = 0$, alors :

$$f(X) = f(x - f(0)) = f(x - f(x')) = 2 - x - x' = 2 - (X + f(0)) - 0 = -X + 2 - f(0)$$

Il reste donc à déterminer la valeur de $f(0)$, mais en prenant $X = 0$, on obtient $f(0) = 2 - f(0)$ soit $f(0) = 1$, et donc $f(X) = 1 - X$ ainsi, si f est solution du problème, alors $f: x \mapsto 1 - x$.

- **Synthèse** : posons $f: x \mapsto 1 - x$. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$, alors :

$$f(x - f(x')) = f(x - (1 - x')) = f(x + x' - 1) = 1 - (x + x' - 1) = 2 - x - x'$$

Ainsi, f est bien solution du problème.

Ainsi, la synthèse, montre que $x \mapsto 1 - x$ est solution du problème, et l'analyse montre que c'est la seule.

Par conséquent, le problème admet une et une solution et c'est la fonction $x \mapsto 1 - x$.

Exercice 3 : le football se joue à 11 et la fin, c'est l'exponentielle qui gagne

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ ».

- Pour $n = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, comme $\exp$ est croissante et que $x \geq 0$, $e^x \geq e^0 = 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \dots - \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarquons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x - 0 - 1 - \frac{2x}{2} - \frac{3x^2}{6} - \dots - \frac{nx^{n-1}}{n!} - \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}$$

En utilisant $\mathcal{P}(n)$, il en découle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geq 0$ Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et

donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq f(0) = 0$. Ainsi, $e^x \geq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En particulier, $\mathcal{P}(11)$ est vraie, ainsi, $\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq \sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}.$