

Dans ce chapitre, nous allons revoir le calcul des primitives et des intégrales d’une fonction continue. Puis nous verrons la résolution d’équations différentielles. Dans ce chapitre, nous ne donnerons pas une définition précise de l’intégrale, nous nous contenterons d’admettre ses propriétés élémentaires ainsi que le théorème fondamental de l’analyse. Nous reviendrons sur la construction de l’intégrale au second semestre et ce sera l’occasion de démontrer ce fameux théorème fondamental.

Table des matières

1	Calcul de primitives et d'intégrales	2
1.1	Rappels des propriétés de l'intégrale et extension aux fonctions à valeurs complexes	2
1.2	Théorème fondamental de l'analyse et conséquences	2
1.3	Primitives usuelles	3
1.4	Calculs des primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$	4
1.5	Calculs d'intégrales par intégrations par parties	5
1.6	Changement de variable	5
2	Équation différentielle linéaire d'ordre un	6
2.1	Définition	6
2.2	Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre un	6
3	Équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants	7

Dans ce chapitre, on considère $\mathbb{K}$ qui vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle. Ainsi, quand un énoncé est donné avec $\mathbb{K}$, il se décline en fait en deux énoncés, un énoncé avec $\mathbb{R}$ et un autre avec $\mathbb{C}$.

1 Calcul de primitives et d'intégrales

1.1 Rappels des propriétés de l'intégrale et extension aux fonctions à valeurs complexes

Dans ce chapitre, on admet que pour $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[a; b]$, on peut lui associer un nombre qui représente l'aire algébrique sous la courbe, noté $\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$, vérifiant les propriétés suivantes :



Proposition n° 1 : propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment

(admis)

Pour tout $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})^2$, $c \in [a; b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$ (linéarité)
2. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(u) du$ (Chasles)
3. $f \geq 0 \implies \int_a^b f(t) dt \geq 0$ (positivité)
4. Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ (croissance)



Définition de l'intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes

Si $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, i.e. $x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$ et $x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$ sont continues sur $[a; b]$, alors on définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)) dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(x)) dx$$

Remarques 1. • Ainsi, $\operatorname{Re} \left(\int_a^b f(x) dx \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)) dx$ et $\operatorname{Im} \left(\int_a^b f(x) dx \right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f(x)) dx$.

- La linéarité et la relation de Chasles restent vraies avec des fonctions à valeurs complexes. En revanche, la positivité et la croissance n'ont plus de sens.
- Si $a > b$, alors on pose $\int_a^b f = -\int_b^a f$ et, par convention, $\int_a^a f = 0$.

1.2 Théorème fondamental de l'analyse et conséquences



Définition d'une primitive

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On appelle **primitive** de f toute fonction $F: I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 1. Si $f(x) = x^3$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors une primitive de f est $x \mapsto$

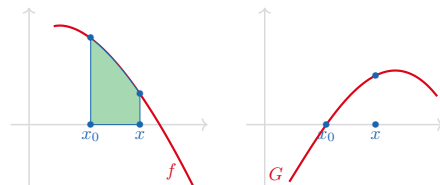


Théorème n° 1 : fondamental de l'analyse

(G primitive est admis provisoirement)

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On définit $G: I \rightarrow \mathbb{C}$, par pour tout $x \in I$, $G(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$.

1. G est une primitive de f qui s'annule en x_0 .
2. Les primitives de f sont exactement les fonctions de la forme $G + c$ où $c \in \mathbb{K}$.
3. La fonction G est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0 .



Play/Pause



Attention il n'y a pas unicité des primitives

On dit donc «une primitive de f » et non «la primitive de f ». Les primitives diffèrent toutes d'une constante.

Remarque 2. Pour une fonction f continue, on note $\int^x f(t) dt$ pour dire une primitive «générique» de f .

Exemple 2. Pour $\lambda \neq 0$, $\int^x e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + c$ où c est une constante. Si $\lambda = 0$, $\int^x e^{\lambda t} dt = x + c$.



Théorème n° 2 : calcul d'intégrale à l'aide d'une primitive

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{K})$ et F une primitive de f , alors :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemples 3. Calculer $\int_3^4 x^3 dx$, et $\int_2^3 \frac{1}{t+i} dt$.

1.3 Primitives usuelles

	Condition(s)	Intervalle(s)
$\int^x \lambda dt = \lambda x + k$	$\lambda \in \mathbb{C}$	$\mathbb{R}$
$\int^x t^\alpha dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int^x \frac{1}{t} dt = \ln x + k$		$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$\int^x e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + k$	$\lambda \in \mathbb{C}^*$	$\mathbb{R}$
$\int^x a^t dt = \frac{1}{\ln a} a^x + k$	$a > 0$ et $a \neq 1$	$\mathbb{R}$
$\int^x \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \varphi) + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\int^x \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \varphi) + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\int^x \tan t dt = -\ln(\cos x) + k$		$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$\int^x 1 + \tan^2(t) dt = \int^x \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \tan x + k$		$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$

TABLE 1 – Primitives usuelles

	Condition(s)	Intervalle(s)
$\int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(x) + k$		$\mathbb{R}$
$\int \frac{1}{f+t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{f}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{f}}\right) + k$	$f \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin(x) + k$		$] -1; 1[$
$\int \operatorname{ch}(\omega t) dt = \frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega x + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
$\int \operatorname{sh}(\omega t) dt = \frac{1}{\omega} \operatorname{ch} \omega x + k$	$\omega \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$

TABLE 2 – Primitives usuelles (suite)

	Condition(s)
$\int u \times u^\alpha = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}(x) + k$	$\alpha \neq -1, u: I \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ si } \alpha \in \mathbb{Z}_+^*, u: I \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ si } \alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u(x)} + k$	$u: I \rightarrow \mathbb{C}^*$
$\int \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} dt = 2\sqrt{u(x)} + k$	$u: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$
$\int u' e^u = e^{u(x)} + k$	aucune
$\int \frac{u'}{u} = \ln(u(x)) + k$	$u: I \rightarrow \mathbb{R}^*$
$\int u'(t) \sin(u(t)) dt = -\cos(u(x)) + k$	$u: I \rightarrow \mathbb{R}$
$\int u' \cos u = \sin(u(x)) + k$	$u: I \rightarrow \mathbb{R}$

TABLE 3 – Primitives usuelles obtenues par composée avec u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Exemples 4. Calculer $\int_2^3 \frac{x}{x+1} dx$ puis $\int e^{2t} \cos(3t) dt$, $\int \cos^3(t) \sin(t) dt$.



Péril imminent : n'inventez pas fausses formules de primitives !

- ⚡ Si on a des primitives de u et de v , en général, on ne peut en déduire des primitives de uv , u/v , $u \circ v$, ou de u^α .
- ⚡ Si u est à valeurs complexes, u'/u ne se primitive pas forcément en $\ln(|u|)$.

1.4 Calculs des primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

 **Comment calculer des primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$?**

1. Si l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a **deux** racines réelles distinctes x_1 et x_2 , alors :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\} \quad \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

2. Si cette équation a **une** racine double x_0 , alors $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - x_0)^2}$

3. S'il y a **zéro** racine réelle, utiliser la forme canonique et $\int^x \frac{dt}{(t + e)^2 + f} = \frac{1}{\sqrt{f}} \arctan\left(\frac{x + e}{\sqrt{f}}\right)$ si $f \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemples 5. • En précisant les intervalles, déterminer des primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4x - 12}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$,

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4x + 10} \text{ puis de } x \mapsto \frac{4x + 3}{x^2 + 4x - 12}$$

• Calculer $\int_2^3 \frac{1}{1 - x^2} dx$.

1.5 Calculs d'intégrales par intégrations par parties

 **Théorème n° 3 : intégration par parties**

Soit $(u, v) \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{K})^2$, alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Exemples 6. • Calculer $\int_1^2 xe^x dx$ et $\int_1^2 x^2 e^x dx$.

• Calculer une primitive de $\ln$, de $\arctan$ et de $x \mapsto e^{2x} \cos(3x)$

Remarque 3. Les IPP sont souvent utiles lorsque la dérivée d'une fonction est plus «simple» que la fonction elle-même.

1.6 Changement de variable

 **Théorème n° 4 : changement de variable**

Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0(\varphi([a; b]), \mathbb{K})$, alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

 **Comment effectuer un changement de variable ?**

Si t est la variable d'intégration, poser une nouvelle variable x en fonction de t . Effectuer ces trois étapes :

- Dans l'intégrande, remplacer les t par leur valeur qui dépend de x . Ne pas écrire une intégrale contenant à la fois des x et des t .
- Si t vaut une des bornes de l'intégrale, calculer la nouvelle borne correspondante en x (le faire pour les deux bornes).
- Enfin, si $x = \varphi(t)$, par dérivation, $dx = \varphi'(t) dt$, vous permet de remplacer dt par sa valeur en dx .

Exemples 7. À l'aide de changements de variable du type $x = \ln(t)/e^t/t^2/\sqrt{t}/\cos(t)/\sin(t)$,

1. calculer $\int_1^2 \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt$
2. calculer $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$
3. calculer $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} dt$
4. calculer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t} + 1}$ et de $x \mapsto \frac{1}{(x + e)^2 + f}$ avec $f \in \mathbb{R}_+^*$

2 Équation différentielle linéaire d'ordre un

2.1 Définition

On se fixe I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.



Définition d'une équation différentielle linéaire d'ordre un

Soit $(a, b) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^2$. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre un** l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ (E) dont l'inconnue est y . Si f est une fonction dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$, on dit que f est une **solution** de (E). On note souvent S_E l'ensemble des solutions de (E).

Exemples 8.

- L'équation $y' - \frac{1}{x \ln(x)} y = \ln(x)e^x$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur $]0; 1[$.
- Vérifier que $x \mapsto \ln(x)e^x$ est une solution de cette équation.
- $xy' + 2y = e^x$ n'est pas *vraiment* une équation différentielle linéaire d'ordre un à cause du terme xy' (on dit que c'est une équation différentielle non normalisée). Pour la résoudre, on divise par x sur un intervalle où x ne s'annule pas. Il faudra donc travailler sur $\mathbb{R}_+^*$, puis faire le même travail sur $\mathbb{R}_-^*$. En effet, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Remarque 4. Malheureusement, l'usage mélange fonctions et nombres dans l'équation différentielle. Cet abus est toléré seulement pour noter l'équation différentielle. Si vous voulez vérifier qu'une certaine fonction f est solution d'une équation, il faudra écrire, « f est dérivable sur I car... soit $x \in I$, $f'(x) + a(x)f(x) = \dots = b(x)$ »



Définition de l'équation homogène

| Soit une EDL d'ordre un $y' + a(x)y = b(x)$. L'**équation homogène** associée est $y' + ay(x) = 0$.

2.2 Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre un



Proposition n° 2 : résolution des équations différentielles linéaires d'ordre un homogène

Soit $y' + a(x)y = 0$ avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I . Les solutions de cette EDL homogène sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{K}$ $S_H = \{x \mapsto Ce^{-A(x)} \text{ avec } C \in \mathbb{K}\}$.

Exemples 9.

- Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y' + xy = 0$ puis $y' - \frac{y}{1+x^2} = 0$.
- Si a est une constante, les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{-ax}$ avec $C \in \mathbb{K}$.



Proposition n° 3 : ensemble des solutions à partir d'une solution particulière

| Soit une EDL d'ordre 1 : $y' + a(x)y = b(x)$ (E). Supposons que l'on ait une solution particulière notée y_P . Alors les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $y_P + y_H$ où $y_H \in S_H$: $S_E = \{y_P + y_H \mid y_H \in S_H\}$.

Exemple 10. Donner les solutions de l'équation $y' - \frac{1}{x \ln(x)} y = \ln(x)e^x$ sur $]0; 1[$.



Proposition n° 4 : variation de la constante

| Soit une EDL d'ordre 1 : $y' + a(x)y = b(x)$ et A une primitive de a . Il existe une solution particulière de la forme $y_P : x \mapsto C(x)e^{-A(x)}$ où $C : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une certaine fonction dérivable sur I .

Exemple 11. Résoudre $y' + \frac{1}{x}y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$.



Proposition n° 5 : principe de superposition

Soient deux EDL : $y' + a(x)y = b_1(x)$ (E_1) et $y' + a(x)y = b_2(x)$ (E_2). Si y_1 (resp. y_2) est une solution de (E_1) (resp. de (E_2)) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est une solution particulière de $y' + a(x)y = \lambda b_1(x) + \mu b_2(x)$.



Théorème n° 5 : existence et unicité de la solution au problème de Cauchy

Soit $(a, b, x_0, y_0) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^2 \times I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy : $y' + a(x)y = b(x)$ et $y(x_0) = y_0$ admet une unique solution sur I .

Exemple 12. Résoudre $y' + \frac{1}{x}y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la condition $y(1) = 5$.

3 Équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants



Définition d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. L'équation $y'' + ay' + by = f(x)$ (E) est appelée **équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants**. Une **solution** de (E) est une fonction $g: I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in I$, $g''(x) + ag'(x) + bg(x) = f(x)$. L'**équation homogène associée** à cette EDL est $y'' + ay' + by = 0$ (H).

Exemple 13. L'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = e^x$ est linéaire d'ordre deux à coefficients constants.



Définition de l'équation caractéristique associée

Soit $y'' + ay' + by = 0$ (H) une EDL homogène d'ordre deux à coefficients constants. On appelle **équation caractéristique associée** à (H) $r^2 + ar + b = 0$



Théorème n° 6 : résolution dans $\mathbb{K}$ d'une EDL du 2nd ordre homogène à coefficients constants

Soit $y'' + ay' + by = 0$ (H) avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique (EC).

1. Si l'EC admet deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$ r_1 et r_2 (i.e. $\Delta \neq 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta > 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et

$$S_H = \{x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2\}$$

2. Si l'EC admet une racine double $r_1 \in \mathbb{K}$ (i.e. $\Delta = 0$) et $S_H = \{x \mapsto (C_1 x + C_2) e^{r_1 x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{K}^2\}$

3. Si l'EC n'a pas de racines dans $\mathbb{K}$ (i.e. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$), notons les deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ alors $S_H = \{x \mapsto (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$

Exemples 14. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$

2. $y'' - 3y' + 9y = 0$

3. $y'' + 5y' + 4y = 0$



Exemple : cas particulier des équations de la forme $y'' + \omega_0^2 y = 0$ où $\omega_0 > 0$

Une connaissance parfaite des solutions de cette équation est nécessaire car apparaît souvent en physique/SI.

**Proposition n° 6 : ensemble des solutions à partir d'une solution particulière**

Soit $y'' + ay' + by = f(x)$ (E) une EDL d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I . Si y_P est une solution particulière de (E) alors les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme : $y_H + y_P$ avec y_H solution de l'équation homogène associée (H). Ainsi, $S_E = \{y_H + y_P \mid y_H \in S_H\}$.

**Proposition n° 7 : principe de superposition**

Si $y_1'' + ay_1' + by_1 = f_1$ et $y_2'' + ay_2' + by_2 = f_2$, alors pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $y'' + ay' + by = \lambda f_1 + \mu f_2$.

Remarque 5. Vous ne saurez pas résoudre $y'' + ay' + by = f$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f quelconque sauf cas particuliers.

**Définition de la multiplicité d'une racine**

Considérons une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) et $r \in \mathbb{C}$.

- Si r est une racine double, on peut factoriser par $(x - r)^2$, on dit que la multiplicité de r est **2**.
- Si r est une racine mais pas double, on peut factoriser que par $(x - r)^1$, on dit que la multiplicité de r est **1**.
- Si r n'est pas une racine, on peut factoriser que par $(x - r)^0 = 1$, on dit que la multiplicité de r est **0**.

**Proposition n° 8 : solution particulière pour certains seconds membres (principe de ressemblance)**

Pour les fonctions f présentes dans ce tableau, l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f$ (avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et d'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ noté EC), admet une solution particulière de la forme indiquée :

Si $f: x \mapsto \dots$	m multiplicité de	Il existe une solution particulière $x \mapsto \dots$
$Ae^{\omega x}$ avec $(A, \omega) \in \mathbb{K}^2$	ω dans l'EC	$x^m B e^{\omega x}$ avec $B \in \mathbb{K}$
$A \cos \omega x + B \sin \omega x$ avec $(a, b, A, B, \omega) \in \mathbb{R}^5$	$i\omega$ dans l'EC	$x^m (C \cos \omega x + D \sin \omega x)$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$
$\sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$	0 dans l'EC	$x^m \sum_{k=0}^n b_k x^k$ avec $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

Exemples 15. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2}e^x$
2. $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$
3. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 4$
4. $y'' + 9y = 8e^{3x} - \cos(3x)$

**Théorème n° 7 : existence et unicité de la solution au problème de Cauchy***(admis)*

Soit $(a, b, y_0, y_1, x_0, f) \in \mathbb{K}^4 \times I \times \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Le problème de Cauchy : $y'' + ay' + by = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ admet unique solution sur I .