

# Intégrales et primitives

**Exercice 1** (★ Cal). Déterminer une primitive des fonctions (préciser le ou les intervalles d'intégration) :

- |                                               |                                       |                                        |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|
| a) $t \mapsto \frac{t}{t-1}$                  | b) $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$        | c) $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$       |
| d) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$         | e) $t \mapsto \cos^3(t)$              | f) $t \mapsto \frac{e^{4t}}{5+e^{4t}}$ |
| g) $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$         | h) $t \mapsto \frac{1}{2it+3}$        | i) $t \mapsto \frac{3t^2}{(t^3+27)^3}$ |
| j) $t \mapsto e^{2t} \sin(3t+4)$              | k) $x \mapsto \frac{3}{\sqrt{3x+1}}$  | l) $x \mapsto t(1-t^2)^4$              |
| m) $x \mapsto \frac{1}{9-x^2}$                | n) $x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$     | o) $x \mapsto \frac{1}{x^2+3x+3}$      |
| p) $x \mapsto \frac{x+2}{x^2+2x+3}$           | q) $x \mapsto \ln(x)^2$               | r) $x \mapsto \sin(\ln(x))$            |
| s) $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$                | t) $x \mapsto \frac{1}{\cos^6(x)}$    | u) $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$            |
| v) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$ | w) $x \mapsto xe^{-x^2}$              | x) $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  |
| y) $x \mapsto \arccos(x)$                     | z) $x \mapsto \sin(x) \cos(x)^{2026}$ |                                        |

**Exercice 2** (★ Cal). Calculer les intégrales suivantes :

- |                                           |                                                |                                                     |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| a) $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt$        | b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) \cos(t) dt$ | c) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}} dt$            |
| d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) dt$    | e) $\int_0^2 \max(t, t^2) dt$                  | f) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2} dx$                |
| g) $\int_0^1 e^{2x} \sin(3x) dx$          | h) $\int_1^2 \frac{e^x-2}{e^x-1} dx$           | i) $\int_1^3  x-2  \times x dx$                     |
| j) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$   | k) $\int_1^2 x \ln(x) dx$                      | l) $\int_0^1 \arctan x dx$                          |
| m) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$    | n) $\int_1^2 x \sin(x) dx$                     | o) $\int_{-1}^1 (x^2+1)e^{-x} dx$                   |
| p) $\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln(t)+1}}$ | q) $\int_1^e \frac{dt}{2t \ln(t)+t}$           | r) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$                    |
| s) $\int_0^2 \frac{2u}{\sqrt{1+u}} du$    | t) $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+\sqrt{1+t}}}$   | u) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ |
| v) $\int_1^2 \frac{\ln^{3/2}(x)}{x} dx$   | w) $\int_2^3 5x\sqrt{1+x^2} dx$                | x) $\int_2^3 \sqrt{e^t-1} dt$                       |

$$y) \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{\operatorname{ch}(u)} du \quad z) \int_1^2 \frac{x^3+8x+2}{x^2+x} dx$$

**Exercice 3** (★★ Rec, Rai, Cal YT). 1. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt$$

2. Calculer la valeur de cette intégrale.

3. En déduire  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$ .

**Exercice 4** (★★★ Rec, Cal, Rai ©). Posons  $I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (b-t)^q dt$ , pour  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ .

1. Si  $q \geq 1$ , trouver une relation entre  $I_{p,q}$  et  $I_{p+1,q-1}$ .

2. Exprimer  $I_{p,q}$  à l'aide de factorielles.

**Exercice 5** (§★★ Rai, Rec ©). Soit  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ , après avoir justifié la dérivabilité, dériver  $x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} f(t) dt$ .

**Exercice 6** (★★ Rai, Rec ©). Soit  $f$  continue sur  $[-1; 1]$ , étudier la limite de  $x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$  en 0.

**Exercice 7** (★ Cal ©). Déterminer les limites des suites définies par :

$$u_n = \int_1^2 \ln^n(x) dx \quad v_n = \int_0^1 x^n \sin(\cos(\sqrt{x})) dx \quad \text{et} \quad \text{★★} \quad w_n = n \int_0^{1/n} e^{t^2} dt$$

**Exercice 8** (§★★ Cal, Rai, Rec ©). Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

1. Montrer que  $(u_n)_n$  est strictement croissante.

2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e = u_n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$ .

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n < u_{n+1} \leq e \leq u_n + \frac{e}{(n+1)!}$ .

4. En déduire que  $(u_n)_n$  est convergente et détermine sa limite.

5. On suppose que  $e \in \mathbb{Q}$ , ainsi  $e = p/q$  avec  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . En considérant  $u_n < e \leq u_n + \frac{e}{(n+1)!}$  trouver une contradiction est conclure.

**Exercice 9** (★★ Cal (Bac2012)). Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$ .

1. Montrer que pour  $n \geq 1$ ,  $I_{n+2} = \frac{e}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$
2. Calculer  $I_1$ ,  $I_3$  et  $I_5$ .
3. Montrer que  $(I_n)_n$  est une suite décroissante et positive.
4. En déduire qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

## Équations différentielles du premier ordre

**Exercice 10** (★ Cal). Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $(1+t^2)y' + 2ty = 0$
2.  $y' + y = 4\cosh(x)$
3.  $(1+x^2)y'(x) + xy(x) = \sqrt{1+x^2}$
4.  $iy' + y = \sin(x)$
5.  $y' + \tan(x)y = \cos^2(x)$  sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$

**Exercice 11** (★★ Rai, Rec, Cal). 1. Résoudre  $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$  sur  $I = ]-\infty; -1[$ , sur  $I = ]-1; 1[$  et sur  $I = ]1; +\infty[$

2. Existe-t-il une solution sur  $\mathbb{R}$  à cette équation ?

**Exercice 12** (★★ Rai, Rec, Cal ©). Trouver toutes les fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$ .

**Exercice 13** (★ Cal ©). Résoudre sur  $] -1; +\infty[$  :  $(x+1)y' + xy = x^2 + 2x + 1$  avec  $y(1) = 1$ . Chercher une solution particulière polynomiale.

**Exercice 14** (★★ Rai, Rec ©). Déterminer toutes les fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que pour tout  $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x+x') = f(x)f(x')$ .

**Exercice 15** (★★). Déterminer toutes les fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables vérifiant, pour tout  $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x+x') = e^{x'}f(x) + e^x f(x')$ .

**Exercice 16** (★ Cal). Résoudre le problème de Cauchy suivant sur  $\mathbb{R}_+$  (poser  $\tau = L/R$ ) :  $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$  avec  $i(0) = 0$

**Exercice 17** (★). Rec Résoudre sur  $\mathbb{R}$ ,  $(x^2-1)y' = xy$ .

**Exercice 18** (★ Cal). Résoudre le problème de Cauchy suivant  $\frac{d[A](t)}{dt} + k[A](t) = 0$  avec  $[A](0) = [A]_0$   
Où  $[A](t)$  est la quantité de matière du réactif  $A$  au temps  $t$  et  $[A]_0$  la quantité initiale. Combien de temps avant que la quantité du réactif  $A$  ait été divisé par 2 par rapport à la quantité initiale ?

**Exercice 19** (★★ Rai, Rec, Cal). Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  puis sur  $\mathbb{R}_-^*$  l'équation différentielle  $x^2y' - y = 0$ . La résoudre également sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 20** (★★ Rai, Rec, Cal YT). Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  puis sur  $\mathbb{R}_-^*$  l'équation différentielle  $xy' - 2y = x^3$ . La résoudre également sur  $\mathbb{R}$ .

## Équations différentielles du second ordre

**Exercice 21** (★ Cal). Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y'' - 4y' + 4y = \sin(x)$
2.  $y'' - y' - 6y = e^{3x} + \sin(x)$
3.  $y'' - 3y' + 4y = 6x + 1 + 7e^{-x}$
4.  $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$  ©

Pour la 4., chercher une solution particulière de la forme  $x \mapsto P(x)e^x$ .

**Exercice 22** (★ Cal). Résoudre le problème de Cauchy suivant :  $y'' - 2(1+i)y' + 2iy = x + i$  avec  $y(0) = y'(0) = 0$

**Exercice 23** (★ Cal). Résoudre  $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{E}{LC}$  avec  $u(0) = 0$  et  $\dot{u}(0) = \frac{E}{RC}$  ( $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ )

**Exercice 24** (★★ Cal ©). Soit  $(E)$   $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3 e^x$ .

1. Montrer que  $x \mapsto e^x$  est solution de l'équation homogène associée.
2. Soit  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable et  $z: x \mapsto y(x)e^{-x}$ . Montrer que  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $z$  est une solution d'une équation.
3. En déduire toutes les solutions de  $(E)$ .

**Exercice 25** (★★). Résoudre sur  $\mathbb{R}$ ,  $f''(x) + f(-x) = \sin(x) + x^2$ .

**Exercice 26** (★). Résoudre sur  $\mathbb{R}$ ,  $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$ .

**Exercice 27** (★★ Cal ©). On cherche les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ . Dans les questions 1 à 4, on prend une fonction  $f$  qui vérifie cette équation.

1. Prouver que  $f$  deux fois dérivable  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Montrer que  $f$  est solution d'une EQDL du second ordre.
3. On pose  $g: t \mapsto f(e^t)$ . Montrer que  $g$  est solution de  $y'' - y' + y = 0$ .
4. Résoudre  $y'' - y' + y = 0$ .
5. Déterminer l'ensemble des solutions.

**Exercice 28** (★★ Rec, Cal). Déterminer toutes les fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) + f(1-x) = e^x$ .

**Exercice 29** (★★). Rec Soit  $f: x \mapsto \cos(x)$  et  $g: x \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$ .

1. Donner, en justifiant les périodes fondamentales de  $f$  et de  $g$ .
2. Déterminer une équation du second ordre à coefficients constants dont le terme devant  $y'$  est nul dont  $f + g$  est solution.
3. Montrer que  $f + g$  n'est pas périodique. Quelle conclusion en tirer ?

**Exercice 30** (★ Cal). Résoudre le système  $\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t) \end{cases}$  avec  $x(0) = 0, y(0) = 1$