

Prérequis : le chapitre logique, surtout bien connaître les méthodes pour montrer l’existence, l’unicité, les implications ainsi que savoir nier les propositions.

- Objectifs :**
- L’étude précise du vocabulaire lié aux ensembles, notamment comment prouver que deux ensembles sont égaux, ainsi que les opérations sur les ensembles comme l’intersection, l’union et le complémentaire d’ensembles.
 - Prolonger (sic) la notion d’application à des ensembles quelconques, donc plus vastes, et introduire la notion d’injection, de surjection pour faire le lien avec la notion de bijection, déjà rencontrée dans le cas des fonctions numériques.

Dans ce chapitre, les notions vues sont très générales et applicables à n’importe quels types d’ensembles (nombres, vecteurs, fonctions, suites, matrices, ...) ou d’applications et seront donc utilisées dans de nombreux chapitres ultérieurs.

Table des matières

1	Ensembles	2
1.1	Définitions	2
1.2	Opérations sur les ensembles	3
2	Applications	4
2.1	Définition	4
2.2	Image directe et image réciproque d’une fonction	5
2.3	Composition de fonctions	6
2.4	Applications injectives	7
2.5	Applications surjectives	7
2.6	Applications bijectives	8

1 Ensembles

1.1 Définitions



Définition informelle d'un ensemble

On appelle **ensemble** une collection d'objets appelés **éléments** de cet ensemble. On note $x \in E$ pour dire que x est un élément de l'ensemble E . Sinon, on écrit $x \notin E$. On note $\emptyset$ l'**ensemble vide**, l'ensemble qui ne contient aucun élément. On appelle **singleton** un ensemble constitué d'un seul élément.

Exemple 1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des ensembles usuels de nombres. Ainsi, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mais $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et même $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$.

Remarque 1. Pour définir un ensemble, on peut procéder par :

- **Extension** : lister tous les éléments qu'il contient : $F = \{2; 4; 6\}$
- **Compréhension** : donner une propriété qui caractérise les éléments parmi ceux d'un ensemble :
 $F = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ pair et } 1 \leq k \leq 7\}$. D'une façon générale, si $\mathcal{P}(x)$ est une proposition qui dépend de $x \in E$, alors $F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$ est un ensemble.
- **Paramétrage** : on donne l'expression des éléments de l'ensemble en fonction d'une variable : $F = \{2k \mid k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket\}$.

Exemple 2. Écrire $\mathbb{U}_n$ par compréhension, par paramétrage puis par extension (pour $n = 3$).



Attention à ne pas confondre les éléments dans la définition par compréhension

Si $F = \{k \in \llbracket 0; 7 \rrbracket \mid \exists p \in \mathbb{N}, k = 2p\}$, alors si $k \in \llbracket 0; 7 \rrbracket$ avec $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors $k \in F$, mais p pas forcément.



Définition de l'inclusion entre ensembles

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est **inclus** dans E /un **sous-ensemble** de E /une **partie** de E si tous les éléments de F appartiennent à E . On note alors $F \subset E$.



Comment démontrer/infirmar une inclusion d'ensemble ?

Pour prouver que $F \subset E$, écrire «soit $x \in F$ (quelconque mais fixé)» puis montrer que $x \in E$.
Pour démontrer que F n'est pas inclus dans E , trouver $x \in F$ tel que $x \notin E$.

Exemples 3. • $\{1; 3\} \subset \{1; 3; 4\}$

- Si E est un ensemble, alors $\emptyset$ et E sont toujours deux parties de E .
- Écrire, si possible, des inclusions entre $\mathbb{U}_4$, $\mathbb{U}_6$, $\mathbb{U}_{12}$ et $\mathbb{U}$.



Définition de l'égalité de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont **égaux** si $E \subset F$ et $F \subset E$. On note alors $E = F$.

Exemple 4. $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{b, a, c, c\}$: l'ordre des éléments et les répétitions n'ont pas d'importance.



Comment montrer que $E = F$?

Très souvent, on montre $E \subset F$ et $F \subset E$.



Proposition n° 1 : transitivité de l'inclusion

Soient E , F et G trois ensembles, si $E \subset F$ et $F \subset G$ alors $E \subset G$.

1.2 Opérations sur les ensembles



Définition de l'union/l'intersection/la différence de deux ensembles et du complémentaire

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E .

- L'**union** de A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B : $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- L'**intersection** de A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A et dans B : $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$
- On dit que A et B sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \emptyset$. On dit aussi que $A \cup B$ est une **union disjointe**.
- L'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B est appelé **différence** (ensembliste) de A par B . On note $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.
- L'ensemble des éléments qui sont dans E mais pas dans A est appelé **complémentaire** de A dans E . On note $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$ ou $\bar{A}$ ou A^c .

Remarques 2.

- Soient A et B deux parties de E . $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ et $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$
- On a $A \cap B \subset A \subset A \cup B$. Attention, le «ou» étant inclusif, si $x \in A \cap B$, alors $x \in A \cup B$.
- Ne confondez pas distincts et disjoints : $A = \{1; 2\}$ et $B = \{1; 3\}$ sont distincts mais pas disjoints.



Proposition n° 2 : propriétés algébriques de l'intersection, de l'union et du complémentaire

Soit E un ensemble et A, B et C trois sous-parties de E .

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup E = E$, $A \cap E = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de l'union par rapport à l'intersection)
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de l'intersection par rapport à l'union)
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de l'intersection par rapport à l'union)
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de l'union par rapport à l'intersection)
6. $\bar{A} \cap A = \emptyset$
7. $\bar{\bar{A}} = A$
8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
9. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
10. $A \subset B \iff E \setminus B \subset E \setminus A$

Remarque 3. $A \cup B \cap C$ n'a pas de sens : calculer $(A \cup B) \cap C$ et $A \cup (B \cap C)$ avec $A = \{1; 2\}$, $B = \{3\}$ et $C = \{1\}$.



Définition d'une union/intersection de plusieurs ensembles

Soient $A_1, A_2, \dots$ et A_n n parties de E . On appelle **union** de ces parties l'ensemble des x qui sont dans au moins l'un des A_i et **intersection** de ces parties l'ensemble des x qui sont dans tous les A_i :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in E \mid \exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in E \mid \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x \in A_i\}$$



Définition d'un recouvrement, d'une partition

On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment un **recouvrement** de E si $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$.

On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une **partition** de E si tous les A_i sont non vides, si c'est un recouvrement et si les A_i sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

Exemple 5. Posons $E_1 = \mathbb{R}_+^*$, $E_2 = \{0\}$ et $E_3 = \mathbb{R}_-^*$, alors E_1, E_2 et E_3 forment une partition de $\mathbb{R}$.

Remarque 4. On peut aussi faire une union ou une intersection infinie d'ensembles. Ainsi, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est une partie de E , alors on note $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = \{x \in E \mid \exists k \in \mathbb{N} \quad x \in E_k\}$ et $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k = \{x \in E \mid \forall k \in \mathbb{N} \quad x \in E_k\}$



Définition d'un couple de deux éléments et du produit cartésien

Si $a \in E$ et $b \in F$, on appelle **couple** (a, b) défini de sorte que : $(a, b) = (a', b')$ ssi $a = a'$ et $b = b'$. On appelle **produit cartésien** de E par F l'ensemble des couples (a, b) avec a dans E et b dans F noté $E \times F$.

- Exemples 6.**
- $(3, 5), (5, 3)$ sont deux couples différents, alors que $\{3, 5\} = \{5, 3\}$. Dans un couple, l'ordre compte.
 - Si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{2, 3, 4\}$, que valent $E \times F$ et $F \times E$?



Définition d'un n -uplet et du produit cartésien de n ensembles

Si $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$, alors on introduit un nouvel objet appelé **n -uplet** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de sorte que :

$$\forall x_1, y_1 \in E_1, \dots, \forall x_n, y_n \in E_n \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = y_i$$

On note $E_1 \times \dots \times E_n$ l'ensemble des n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec x_i parcourant E_i , pour $1 \leq i \leq n$.

Exemple 7. $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels, $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de réels.



Définition de l'ensemble des parties d'un ensemble

On appelle **ensemble des parties** de E l'ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$, qui contient exactement les sous-ensembles de E .

Exemples 8. Calculer $\mathcal{P}(\{1\})$, $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ et $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.

Remarques 5.

- $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles : $F \in \mathcal{P}(E)$ ssi $F \subset E$.

- $\{\emptyset\}$ n'est pas l'ensemble vide mais un ensemble constitué d'un unique élément qui est l'ensemble vide.



Attention à ne pas confondre inclusion et appartenance

Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors il est vrai que $1 \in E$, $\{1\} \subset E$ et que $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$. Par contre, $\{1\} \notin E$ et $1 \notin \mathcal{P}(E)$.

2 Applications

2.1 Définition



Définition d'une application (ou d'une fonction)

On appelle **application/fonction** d'un ensemble E vers un ensemble F un procédé f qui, à tout élément $x \in E$, associe un unique élément dans F , noté $f(x)$. E est l'**ensemble de départ** et F est l'**ensemble d'arrivée** de f . Soit $x \in E$. Posons $y = f(x) \in F$, on dit que y est l'**image** de x par f , on dit aussi que x est un **antécédent** de y par f . On note $f: \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ ou $f: E \rightarrow F$. L'ensemble des fonctions de E vers F se note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E .

Exemples 9.

- $f: \begin{cases} \{-1, 0, 1, 2\} \longrightarrow \{0, 1, 4, 5\} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ est une fonction.

- La fonction $\text{Id}_E: \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$ est l'**application identité** de E .

- Soit $c \in F$. La fonction $\begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto c \end{cases} \in \mathcal{F}(E, F)$ est une **application constante**.

- Soit $A \subset E$, on appelle **indicatrice** de A l'application $\mathbb{1}_A: \begin{cases} E \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{cases} \in \{0, 1\}^E$.

Cette application traduit l'appartenance à la partie A : $\forall x \in E \quad x \in A \iff \mathbb{1}_A(x) = 1$



Péril imminent à ne pas confondre fonction avec élément

Si $x \in E$, $f(x)$ n'est pas une fonction, $f(x)$ n'est qu'un élément de F .



Définition du graphe d'une fonction

On appelle **graphe** de l'application $f: E \rightarrow F$ l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in E\}$.



Définition de l'égalité de deux fonctions

On dit que $f: E \rightarrow F$ est **égal** à $g: E' \rightarrow F'$ si $E = E'$, $F = F'$ et si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.



Définition de la restriction d'une application

Soient $f: E \rightarrow F$ et A une partie de E . On appelle **restriction** de f à A l'application $f|_A: \begin{cases} A \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$

Exemple 10. Les fonctions $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ et $g: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ sont différentes, g est la restriction de f à $\mathbb{R}_+$.



Définition d'un prolongement d'une application

Soit $f: A \rightarrow F$ avec $A \subset E$. On appelle **prolongement** de f sur E toute fonction $g: E \rightarrow F$ telle que $g|_A = f$ (autrement dit, pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)$).

Exemple 11. Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$. Posons $g(x) = \begin{cases} 42 & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$, alors g est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$.

Remarques 6. • Lorsqu'on prolonge, il serait donc cohérent de nommer la nouvelle fonction différemment de la fonction d'origine. Cependant, par abus, il se peut que cela ne soit pas le cas dans un sujet de concours.

• Si $f: E \rightarrow F$ et que $A \subset E$, la restriction de f à A est unique. En revanche, si $f: A \rightarrow F$, il n'y a pas unicité des prolongements de f sur E . D'où «la restriction» et «un prolongement».

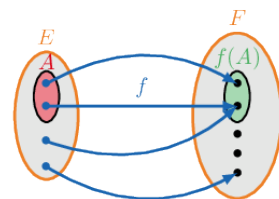
2.2 Image directe et image réciproque d'une fonction



Définition de l'image directe d'une fonction

Soit $f: E \rightarrow F$ et A une partie de E , on appelle **image (directe)** de A par f l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A \quad y = f(x)\}$$



Remarques 7. • L'ensemble $f(A)$ est défini par paramétrage et par compréhension.

• L'ensemble $f(A)$ est une partie de F qui contient tous les $f(x)$ pour $x \in A$.

• Pour $y \in F$:

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A \quad y = f(x)$$



Proposition n° 3 : images directes et inclusion

Soit $f: E \rightarrow F$. Soient A et A' deux parties de E . Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.

Remarque 8. Soient A et A' deux parties de E , $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

Exemple 12. Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$. Déterminer $f([-1; 2])$ et $f(\mathbb{R})$.



Attention à ne pas confondre ensemble d'arrivée et image

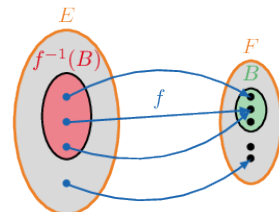
Si $f: E \rightarrow F$, il n'y a aucune raison pour que l'image de E par f vaille F , on a seulement $f(E) \subset F$.



Définition de l'image réciproque d'une fonction

Soit $f: E \rightarrow F$ et B une partie de F , on appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$



Remarques 9. • L'ensemble $f^{-1}(B)$ est défini par compréhension.

• L'ensemble $f^{-1}(B)$ est une partie de E qui contient les antécédents par f de tous les éléments de B .

• Pour $x \in E$:

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

• Si $f: E \rightarrow F$, alors $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$.

Exemple 13. Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$. Déterminer $f^{-1}([-1, 2])$, $f^{-1}([-2; -1])$ ainsi que $\cos^{-1}]-\infty; 1/2[$



Proposition n° 4 : images réciproques et inclusion

Soit $f: E \rightarrow F$. Soient B et B' deux parties de F . Si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.



Attention il n'y a aucune raison d'avoir $f^{-1}(f(A)) = A$ ou $f(f^{-1}(B)) = B$

Ici, f^{-1} ne désigne pas la bijection réciproque de f parce que f n'est pas forcément bijective.

Exemple 14. Calculer $f^{-1}(f([-1; 2]))$ et $f(f^{-1}([-1; 2]))$ pour $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$.

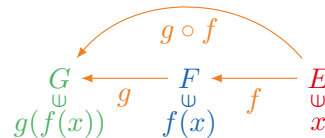
2.3 Composition de fonctions



Définition de la composition de fonctions

Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$. On définit une nouvelle fonction, appelée **composée**

de g et de f , par $g \circ f: \begin{cases} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$.



Proposition n° 5 : propriétés de la composition

Soit $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$ et $h: G \rightarrow H$:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$\text{Id}_F \circ f = f$$

$$f \circ \text{Id}_E = f$$

Remarque 10. Si $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow E$, alors on peut à la fois définir $g \circ f: E \rightarrow E$ et $f \circ g: F \rightarrow F$. Cependant, généralement, $f \circ g \neq g \circ f$. Si $f: E \rightarrow E$, $g: E \rightarrow E$ et $f \circ g = g \circ f$, on dit alors que f et g **commutent**.

Exemple 15. Est-ce que $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + 2 \end{cases}$ et $g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ commutent ?

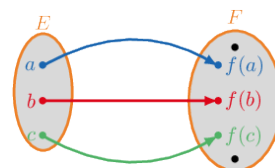
2.4 Applications injectives



Définition de l'application injective

On dit que $f: E \rightarrow F$ est une **injection/injective** si tout élément de F a au plus un antécédent par f :

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$$



Attention à ne pas confondre l'implication dans la définition d'injectivité avec sa réciproque :

« $\forall (x, x') \in E^2 \quad x = x' \implies f(x) = f(x')$ » est vraie pour toutes les fonctions y compris les non injectives.

Remarques 11. • f n'est pas injective ssi

- On peut aussi formuler la définition d'injectivité par contraposée :

Exemples 16. Les applications $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2 - 5x \end{cases}$, $g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$, $h: \begin{cases} [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ sont-elles injectives ?



Proposition n° 6 : une application strictement monotone est injective

Si $A \subset \mathbb{R}$ et que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone, alors f est injective.



Proposition n° 7 : composée de deux injections

Si $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ sont deux fonctions injectives, alors $g \circ f: E \rightarrow G$ est injective.

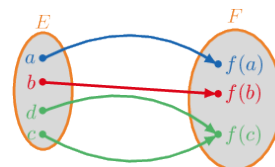
2.5 Applications surjectives



Définition d'une application surjective

On dit que $f: E \rightarrow F$ est une **surjection/surjective** si tout élément de F a au moins un antécédent par f :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$



Exemples 17. Les applications $f: \begin{cases} [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$, $g: \begin{cases} [0; \pi] \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ sont-elles surjectives ? Si l'une l'est et pas l'autre, c'est bien parce qu'en dépit des apparences, ce sont deux applications différentes.

Remarques 12. • Pour justifier la surjectivité de $f: E \rightarrow F$, il suffit, pour chaque $y \in F$, de justifier l'existence d'une solution à l'équation $y = f(x)$.

- $f: E \rightarrow F$ n'est pas surjective si :
- $f: E \rightarrow F$ est surjective équivaut à $f(E) = F$.

- Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction quelconque, alors nécessairement $g: \begin{cases} E \longrightarrow f(E) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est surjective.

**Proposition n° 8 : composée de deux surjections**

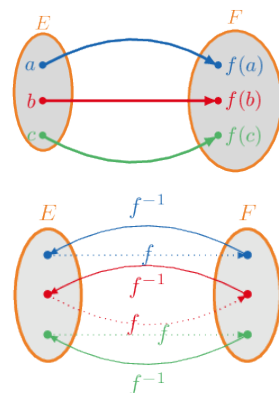
Si $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ sont deux fonctions surjectives, alors $g \circ f: E \rightarrow G$ est surjective.

2.6 Applications bijectives**Définition d'une application bijective et de son application réciproque**

On dit que $f: E \rightarrow F$ est une **bijection/bijective** si tout élément de F a un unique antécédent par f :

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$$

Si f est bijective, pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on pose $f^{-1}(y) = x$. Ceci définit une application $f^{-1}: F \rightarrow E$ appelée **bijection réciproque** de f .



Exemples 18. $f: \begin{cases} [0; \pi] \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ est bijective, contrairement à $g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$.

**Proposition n° 9 : caractérisation de la bijectivité**

Soit $f: E \rightarrow F$. On a équivalence entre :

1. f est bijective
2. f est injective et surjective
3. $\exists g \in \mathcal{F}(F, E) \mid g \circ f = \text{Id}_E \text{ et } f \circ g = \text{Id}_F$

Si c'est le cas, nécessairement un tel g est unique et vaut $g = f^{-1}$.

Remarques 13. • Si $f: E \rightarrow F$ est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.

- La proposition 10 montrera que $f^{-1}: F \rightarrow E$ est bijective ce qui justifiera le nom de **bijection réciproque**.
- Si f est strictement monotone sur un intervalle I , le théorème de la bijection strictement monotone affirmait que $f: I \rightarrow f(I)$ était bijective, mais c'est la conséquence immédiate de la proposition 6 et de la remarque 12.

**Proposition n° 10 : propriétés de la bijection réciproque**

1. Si $f: E \rightarrow F$ est bijective alors $f^{-1}: F \rightarrow E$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$
2. Si $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ sont bijectives alors $g \circ f: E \rightarrow G$ aussi et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
3. Si $f: E \rightarrow F$ est bijective et $B \subset F$, alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$ (c'est pas du troll)

**Quelles sont les méthodes pour montrer que $f: E \rightarrow F$ est bijective ?**

M1 Fixer $y \in F$ et démontrer que l'équation, d'inconnue x , $f(x) = y$ admet une unique solution dans E .

M2 Écrire f comme une composée de fonctions bijectives.

M3 Trouver $g: F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

M4 Montrer que f est injective et surjective.

M5 Si $f: I \rightarrow J$ est continue et strictement monotone, alors f est bijective ssi $f(I) = J$ (avec I intervalle de $\mathbb{R}$)

Exemple 19. Démontrer que $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x + 2y + 3, 2x + 3y - 8) \end{cases}$ est bijective et déterminer f^{-1} .

**Attention : préciser les ensembles de départ et d'arrivée pour les injections/surjections/bijections**

Certaines fonctions sont injectives/surjectives/bijjectives uniquement pour des ensembles de départ et d'arrivée bien choisis. Méditez les exemples 16, 17 et 18.