

Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3. Corrigé sur Youtube : <https://youtu.be/6mwftyUHHk>

Correction de l'exercice 4. 1. Partons de $I_{p+1,q-1} = \int_a^b (t-a)^{p+1} \times (b-t)^{q-1} dt$. Posons $u: t \mapsto (t-a)^{p+1}$,

La fonction u est $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ et $u': t \mapsto (p+1)(t-a)^p$. Posons $v: t \mapsto \frac{-1}{q}(b-t)^q$, la fonction v est $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ et $v': t \mapsto (b-t)^{q-1}$, ainsi par intégration par parties :

$$I_{p+1,q-1} = \left[(t-a)^{p+1} \frac{-1}{q} (b-t)^q \right]_a^b - \int_a^b (p+1)(t-a)^p \times \frac{-1}{q} (b-t)^q dt = \frac{p+1}{q} \times I_{p,q}$$

2. Ainsi, $I_{p,q} = \frac{q}{p+1} \times I_{p+1,q-1}$ En appliquant cette relation, non pas à $I_{p,q}$ mais à $I_{p+1,q-1}$, on obtient $I_{p+1,q-1} = \frac{q-1}{p+2} \times I_{p+2,q-2}$ soit $I_{p,q} = \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times I_{p+2,q-2}$. En réitérant, encore, on trouve

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} \frac{q-1}{p+2} \frac{q-2}{p+3} I_{p+3,q-3}$$

En continuant jusqu'à $q = 0$, on obtient :

$$I_{p,q} = \frac{q(q-1)(q-2) \dots 1}{(p+1)(p+2)(p+3) \dots (p+q)} I_{p+q,0}$$

En multipliant par $p!$ en haut et en bas, ceci se simplifie en

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \frac{p!q!}{(p+q)!} I_{p+q,0} = \frac{p!q!}{(p+q)!} \int_a^b (t-a)^{p+q} dt = \frac{p!q!}{(p+q)!} \left[\frac{1}{p+q+1} (t-a)^{p+q+1} \right]_a^b \\ &= \frac{p!q!}{(p+q)!} \frac{(b-a)^{p+q+1}}{(p+q+1)} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} (b-a)^{p+q+1} \end{aligned}$$

Le problème, c'est que l'on a pas été très rigoureux en affirmant l'égalité avec les «...». Pour justifier, on va donc faire une récurrence en posant l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(q)$: «pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} (b-a)^{p+q+1}$ ».

- Si $q = 0$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{p,0} = \int_a^b (t-a)^p dt = \left[\frac{(t-a)^{p+1}}{p+1} \right]_a^b = \frac{(b-a)^{p+1}}{p+1}$, tandis que $\frac{p!q!}{(p+q+1)!} (b-a)^{p+q+1} = \frac{p!}{(p+1)!} (b-a)^{p+1} = \frac{1}{p+1} (b-a)^{p+1}$. Ainsi, $\mathcal{P}(q)$ est vraie.
- Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(q)$ vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+1} \times I_{p+1,q} = \frac{q+1}{p+1} \times \frac{q!(p+1)!}{(p+2+q)!} (b-a)^{p+q+2} = \frac{(q+1)!p!}{(p+q+2)!} (b-a)^{p+q+2}$$

Et ce, pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.

- Par récurrence, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(q)$ est vraie. Ainsi, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} (b-a)^{p+q+1}$$

Correction de l'exercice 5. Notons, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t) dt$ La fonction f est continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f admet au moins une primitive. Notons F une primitive de f . Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = F(x^3) - F(x^2)$. Or F est dérivable (car est une primitive de f) ainsi que $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^2$. Par composée, $x \mapsto F(x^3)$ et $x \mapsto F(x^2)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, par différence, ϕ l'est également. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = 3x^2 F'(x^3) - 2x F'(x^2) = 3x^2 f(x^3) - 2x f(x^2)$.

Correction de l'exercice 6. Posons, comme f est continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f admet une primitive notée F . Ainsi, F est dérivable et $F' = f$. Or, pour $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = f(0)$$

Correction de l'exercice 7. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme l'application $\ln^n$ est strictement croissante sur $[1; 2]$, pour $x \in [1; 2]$, $\ln^n(1) \leq \ln^n(x) \leq \ln^n(2)$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_1^2 0 dx \leq u_n \leq \int_1^2 \ln^n(2) dx = \ln^n(2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(en effet $0 < \ln(2) < 1$). D'après le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, $-1 \leq \sin(\cos(\sqrt{x})) \leq 1$. En multipliant par $x^n \geq 0$, on $-x^n \leq x^n \sin(\cos(\sqrt{x})) \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 -x^n dx \leq v_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, $\frac{-1}{n+1} \leq v_n \leq \frac{1}{n+1}$. D'après le théorème d'encadrement, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

3. La fonction $f: t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive, soit F une primitive de $t \mapsto e^{t^2}$. Ainsi,

$$W_n = n \left(F\left(\frac{1}{n}\right) - F(0) \right) = \frac{F\left(\frac{1}{n}\right) - F(0)}{\frac{1}{n} - 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F'(0) = f(0) = 1$$

Correction de l'exercice 8. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Ainsi, $(u_n)_n$ est strictement croissante.

2. Procédons par récurrence. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $e = u_n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$ ».

- Pour $n = 0$,

$$u_n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt = u_0 + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} e^t dt = \frac{1}{0!} + \int_0^1 e^t dt = 1 + (e - 1) = e$$

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Posons alors $u: t \mapsto \frac{-(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v: t \mapsto e^t$. Ainsi, u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, en intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} e &= u_n + \int_0^1 \underbrace{\frac{(1-t)^n}{n!}}_{u'(t)} \underbrace{e^t}_{v(t)} dt = u_n + \left[\underbrace{\frac{-(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}}_{u(t)} \underbrace{e^t}_{v(t)} \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{-(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}}_{u(t)} \underbrace{e^t}_{v'(t)} dt \\ &= u_n + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt \\ &= u_{n+1} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e = u_n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $u_n < u_{n+1}$ car $(u_n)_n$ est strictement croissante.
- Comme $e - u_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$. Or, $t \mapsto \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t$ est une fonction positive sur $[0; 1]$, par croissance de l'intégrale, $e - u_{n+1} \geq 0$, ainsi $u_{n+1} \leq e$.
- Pour tout $t \in [0; 1]$, $\frac{(1-t)^n}{n!} e^t \leq \frac{(1-t)^n}{n!} e$, par croissance de l'intégrale,

$$e - u_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt = \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\text{Ainsi, } e \leq u_n + \frac{1}{(n+1)!}.$$

$$\text{On a donc bien } u_n < u_{n+1} \leq e \leq u_n + \frac{e}{(n+1)!}$$

4. En utilisant l'inégalité de la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e - \frac{e}{(n+1)!} \leq u_n \leq e$. Comme $e - \frac{e}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$ D'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$.

5. Comme $u_n < \frac{p}{q} \leq u_n + \frac{e}{(n+1)!}$, multiplions par $n!$, on obtient $n!u_n < n!\frac{p}{q} \leq n!u_n + \frac{e}{n+1}$. Or comme $n > e$, $\frac{e}{n+1} < 1$. Ainsi, $n!u_n < n!\frac{p}{q} < n!u_n + 1$. De plus, $n!u_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$ est un entier. Comme $n \geq q$, $n!\frac{p}{q}$ est un entier compris strictement entre deux entiers consécutifs. On obtient donc une contradiction. En conclusion, e est un nombre irrationnel.

Correction de l'exercice 9. 1. Soit $n \geq 1$.

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^{x^2} dx = \int_0^1 x^{n+1} x e^{x^2} dx$$

Posons alors $u: x \mapsto x^{n+1}$ et $v: x \mapsto \frac{e^{x^2}}{2}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, $u': x \mapsto (n+1)x^n$ et $v: x \mapsto x e^{x^2}$ ainsi par intégration par parties :

$$= \frac{e}{2} - (n+1)I_n$$

$$2. I_1 = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$