

DS2

10 octobre 2026

- L'usage de la calculatrice, de documents, de téléphone, de montre intelligente (sic) est interdit.
- La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation.
- Les résultats de chaque question seront encadrés.
- Vous pouvez faire les exercices et problèmes dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer quel exercice et quel problème vous êtes en train de traiter.
- Au sein d'un problème ou d'un exercice, il faut essayer, autant que possible, de traiter les questions dans l'ordre.
- Si un(e) candidat(e) relève ce qu'il(elle) lui semble être une erreur d'énoncé, il(elle) l'indique clairement sur sa copie et indique les initiatives qu'il(elle) a pris.

Exercice : cinq fonctions pour faire un gâteau !

1. Recopiez et complétez cette phrase : «arccos est une bijection de vers , elle est dérivable sur et pour tout $x \in$, $\arccos'(x) =$.»
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\operatorname{ch}(x) < \operatorname{sh}(x) < \operatorname{ch}(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\arccos\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right) + 2 \arctan(e^x) = \pi$$

Problème : les homographies en folie !

Étude d'une fonction

1. Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ sur $]2; +\infty[$ et sur $] -\infty; 2[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, si cela à un sens, $h(x) = \frac{2x-5}{x-2}$.

2. Déterminer l'ensemble de définition de h noté D .
3. Écrire une fonction Python nommée `Fonctionh` qui, à un paramètre `x` dans D , renvoie $h(x)$.
4. Calculer les images de 0, 1 et 3 par la fonction h .
5. Déterminer les limites de h en $+\infty$, $-\infty$, 2^+ et 2^- .
6. Justifier que h est dérivable sur D et calculer sa dérivée h' .
7. Donner l'équation de la tangente de h en 0.
8. Démontrer proprement que h n'est pas monotone sur D .
9. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in D$, $h(x) = a + \frac{b}{x-2}$.
10. Représenter h sur un repère orthonormé avec les éventuelles asymptotes ainsi que la tangente en 0 de h . On prendra trois centimètres (ou trois grands carreaux) par unité.

Intégrales

11. Calculer l'intégrale $\int_1^{\frac{3}{2}} h(x) \, dx$.
12. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\ln(3/2)} \frac{2e^{2t} - 5e^t}{e^t - 2} \, dt$
13. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\ln(3/2)} \frac{e^{2t} - 5e^t}{(e^t - 2)^2} e^t \, dt$

On pose, pour $x > 0$, $\varphi(x) = \int_{3+x^2}^{3+x^3} h(t) \, dt$

14. Déterminer le signe de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
15. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner sa dérivée.

Équations

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines n -ième complexes de -4 . En particulier, donner les racines carrées de -4 .
17. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :
 - (a) $\frac{2x-5}{x-2} = 0$
 - (b) $\frac{2x-5}{x-2} = 1$

$$(c) \frac{2x-5}{x-2} = 2$$

$$(d) \frac{2x-5}{x-2} = x$$

18. Si $f: I \rightarrow J$, où I et J sont deux intervalles, rappeler la définition avec des quantificateurs de f bijective de I vers J .
19. Dans le cas, où $f: I \rightarrow J$ est bijective, définir la bijection réciproque de f notée f^{-1} : on précisera les ensembles de départ et d'arrivée de f^{-1} ainsi que la valeur de l'image d'un élément de l'ensemble de départ par f^{-1} .

Remarque 1. On remarque que les deux définitions précédentes se généralisent au cas d'une fonction définie sur D à valeurs dans D et de manière générale pour n'importe quel ensemble de départ et n'importe quel ensemble d'arrivée.

20. Démontrer que h est une bijection de D vers D et trouver sa bijection réciproque.
21. Déterminer les $n \in \mathbb{Z} \cap D$ tels que $h(n) \in \mathbb{Z}$.

Étude d'une suite

On pose $u_0 = 0$ et si u_n est défini et que $u_n \in D$, on pose $u_{n+1} = h(u_n)$

22. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
23. Conjecturer la valeur de u_n pour $n \in \mathbb{N}$ et démontrer cette conjecture.
24. Soit $u_0 \in D$. On suppose la suite $(u_n)_n$ est définie par $u_{n+1} = h(u_n)$, généralisez le résultat précédent.

Généralisation

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$, on définit $h: w \mapsto \frac{aw + b}{cw + d}$, pour $w \in \mathbb{C}$, si cela a un sens. On dit que h est une fonction homographique. Dans la suite, on supposera de plus, que $c \neq 0$.

25. Donner l'ensemble de définition de h , noté D_h .
26. Déterminer, en fonction de a , b , c et d , le nombre de solutions de l'équation $h(w) = w$.
27. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, donner la définition de l'image de f notée $f(I)$.

Remarque 2. Cette définition se généralise immédiatement au cas où $f: E \rightarrow F$ où E et F sont des ensembles (pas forcément des intervalles de $\mathbb{R}$).

28. Déterminer $h(D_h)$ (l'image de D_h par la fonction h).
29. Démontrer que h réalise une bijection de D_h vers $h(D_h)$, déterminer la bijection réciproque. Noter que h^{-1} est aussi une homographie.
30. On note $g: w \mapsto \frac{a'w + b'}{c'w + d'}$ une autre homographie $(a', b', c', d') \in \mathbb{C}^4$ tels que $a'd' - b'c' \neq 0$ et $c' \neq 0$. Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ h$, puis démontrer que $g \circ h$ est encore une homographie.

Remarque 3. Les coefficients de $g \circ f$ sont ceux du produit matriciel $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Soit (v_n) une suite, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in D_h$ et $v_{n+1} = h(v_n)$. On suppose que l'équation $h(z) = z$ a deux solutions complexes distinctes z_1 et z_2 . On suppose de plus, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq z_2$ ce qui permet de poser $w_n = \frac{v_n - z_1}{v_n - z_2}$.

31. Démontrer que la suite $(w_n)_n$ est une suite géométrique et trouver sa raison que l'on notera q .
32. Exprimer w_n en fonction de w_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
33. En déduire une expression explicite de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n , z_1 , z_2 , a , b , c , d et v_0 .

On suppose maintenant que l'équation $h(z) = z$ a une seule solution complexe z_0 et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq z_0$.

34. Montrer que $\left(\frac{1}{v_n - z_0}\right)_n$ est une suite arithmétique et en déduire l'expression explicite de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.