

Exercice : cinq fonctions pour faire un gâteau !

1. $\arccos$ est une bijection de $[-1; 1]$ vers $[0; \pi]$, dérivable sur $] -1; 1[$ et pour tout $x \in] -1; 1[$, $\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x} > 0$, ainsi, $\operatorname{sh}(x) < \operatorname{ch}(x)$. De même, $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x > 0$, ainsi, $\operatorname{sh}(x) > -\operatorname{ch}(x)$. Ainsi, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, -\operatorname{ch}(x) < \operatorname{sh}(x) < \operatorname{ch}(x)}$.
3. La question précédente montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x) \in] -1; 1[$ (car $\operatorname{ch}(x) > 0$) et donc $\operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$ est dans l'ensemble de définition d' $\arccos$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \arccos\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right) + 2 \arctan(e^x)$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow] -1; 1[\\ x \longmapsto \operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x) \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$). De plus, $\arccos$ est dérivable sur $] -1; 1[$, par composition $x \mapsto \arccos(\operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(e^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)^2}} + 2e^x \times \frac{1}{1 + (e^x)^2} \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}}} + \frac{2}{e^{-x} + e^x} \\ &= \frac{-\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} + \frac{2}{e^{-x} + e^x} \\ &= \frac{-1}{\operatorname{ch}(x)} + \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}$. La fonction est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. De plus, $f(0) = \arccos(0) + 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{\pi}{4} = \pi$. Ainsi, on en conclut que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \arccos\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right) + 2 \arctan(e^x) = \pi}$$

Problème : les homographies en folie !

1. La fonction $x \mapsto \ln(|x-2|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ sur $]2; +\infty[$ et sur $] -\infty; 2[$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $h(x)$ est définie ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } h \text{ est } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$.
3.

```
def Fonctionh(x):  
    return (2*x-5)/(x-2)
```
4. $\boxed{h(0) = \frac{5}{2}, h(1) = 3, h(3) = 1}$.
5. Pour tout $x \in D \cap \mathbb{R}^*$,

$$h(x) = \frac{x(2-5/x)}{x(1-2/x)} = \frac{2-5/x}{1-2/x}$$

Ainsi, par quotient de limites finies, $\boxed{h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2}$ et $\boxed{h(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 2}$. De plus, $2x - 5 \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} -1$ et $x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} 0^+$, par quotient $\boxed{h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} -\infty}$. De même, $2x - 5 \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} -1$ et $x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} 0^-$ par quotient $\boxed{h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2^-} +\infty}$.

6. La fonction h est le quotient de deux fonctions dérivables sur D dont le dénominateur ne s'annule pas sur D , ainsi $\boxed{h \text{ est dérivable sur } D}$ et

$$\forall x \in D \quad h'(x) = \frac{2(x-2) - (2x-5)}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

7. L'équation de la tangente de h en 0 est $\boxed{y = h(0) + h'(0)(x-0) = \frac{5}{2} + \frac{x}{4}}$.

8. Posons $x = 1$ et $x' = 3$, alors on a bien $x \leq x'$ et $f(x) = 3 > f(x') = 1$, ainsi la fonction f n'est pas croissante sur D . Posons maintenant $x = 0$ et $x' = 1$, alors on a bien $x \leq x'$ et $f(x) = 5/2 < f(x') = 3$, ainsi la fonction f n'est pas décroissante sur D . Ainsi, $\boxed{h \text{ n'est pas monotone sur } D}$.

9. Pour tout $x \in D$,

$$h(x) = \frac{2x-4-1}{x-2} = \frac{2x-4}{x-2} + \frac{-1}{x-2} = 2 + \frac{-1}{x-2}$$

On obtient alors le résultat voulu avec $\boxed{a = 2 \text{ et } b = -1}$.

10. La dérivée de h est strictement positive sur l'intervalle $]2; +\infty[$ donc la fonction h est strictement croissante sur $]2; +\infty[$. La dérivée de h est strictement positive sur l'intervalle $] -\infty; 2[$, donc h est strictement croissante sur $] -\infty; 2[$.

Il découle de l'étude des limites que la droite $x = 2$ est une asymptote verticale à h . et que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$. On obtient donc le graphe suivant :

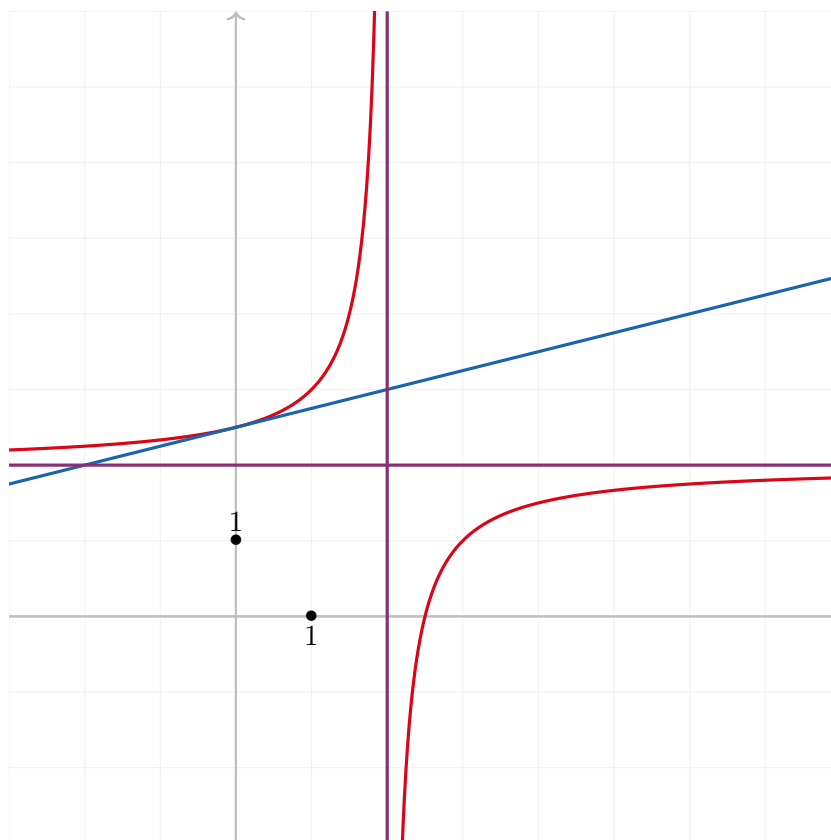


FIGURE 1 – La courbe représentative de h en rouge, les asymptotes en violet et la tangente en 0 en bleu.

11. En utilisant l'expression de h trouvé à la question 11 :

$$\int_1^{\frac{3}{2}} h(x) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} 2 - \frac{1}{x-2} dx = [2x - \ln(|x-2|)]_1^{\frac{3}{2}} = 3 - \ln(2 - 3/2) - 2 + \ln(1) = 1 + \ln(2)$$

Donc $\int_1^{\frac{3}{2}} h(x) dx = 1 + \ln(2)$

12. Effectuons un changement de variable, posons $x = e^t$.

- $\frac{dx}{dt} = e^t$, donc $dt = \frac{dx}{e^t} = \frac{dx}{x}$,
- Si $t = 0$, alors $x = 1$
- Si $t = \ln(3/2)$, alors $x = 3/2$,

On obtient donc :

$$\int_0^{\ln(3/2)} \frac{2e^{2t} - 5e^t}{e^t - 2} dt = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2x^2 - 5x}{x - 2} \frac{dx}{x} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2x - 5}{x - 1} dx = \int_1^{\frac{3}{2}} h(x) dx = 1 + \ln(2)$$

Où on a utilisé le résultat de la question précédente. Ainsi, $\int_0^{\ln(3/2)} \frac{2e^{2t} - 5e^t}{e^t - 2} dt = \ln(2) - \frac{11}{2}$.

13. Posons, pour tout $t \in [0; \ln(3/2)]$, $u(t) = e^{2t} - 5e^t$ et $v(t) = \frac{-1}{e^t - 2}$. Remarquons que les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \ln(3/2)]$. De plus, $u': t \mapsto 2e^{2t} - 5e^t$ et $v': t \mapsto \frac{e^t}{(e^t - 2)^2}$, ainsi, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(3/2)} \frac{e^{2t} - 5e^t}{(e^t - 2)^2} e^t dt &= \int_0^{\ln(3/2)} u(t)v'(t) dt = \left[\frac{e^{2t} - 5e^t}{2 - e^t} \right]_0^{\ln(3/2)} - \int_0^{\ln(3/2)} (2e^{2t} - 5e^t) \times \frac{-1}{e^t - 2} dt \\ &= \frac{\frac{9}{4} - 5 \times \frac{3}{2}}{2 - \frac{3}{2}} + 4 + 1 + \ln(2) = \frac{9 - 30}{2} + 5 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Où on a utilisé le résultat de la question précédente. Ainsi, $\int_0^{\ln(3/2)} \frac{e^{2t} - 5e^t}{(e^t - 2)^2} e^t dt = \ln(2) - \frac{11}{2}$

14. • Soit $x \in [1; +\infty[$, alors $3 + x^2 \leq 3 + x^3$. De plus, pour tout $t \in [3 + x^2; 3 + x^3]$, $t \geq 3$, dont $2t - 5 \geq 0$ et $t - 2 > 0$, par quotient $h(t) \geq 0$, par positivité de l'intégrale, $\boxed{\text{si } x \in [1; +\infty[, \varphi(x) \geq 0]}$.
- Soit $x \in]0; 1[$, $3 + x^3 < 3 + x^2$, ainsi, $\varphi(x) = - \int_{3+x^3}^{3+x^2} h(t) dt$, h est aussi positive sur $[3 + x^3; 3 + x^2]$, par positivité de l'intégrale $\int_{3+x^3}^{3+x^2} h(t) dt \geq 0$, ainsi, $\boxed{\text{si } x \in]0; 1[, \varphi(x) \leq 0]}$.

15. Comme la fonction h est continue (car dérivable) sur $]2; +\infty[$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, il existe une primitive de h notée H sur $]2; +\infty[$. Par conséquence, pour $x > 0$, $\varphi(x) = H(3 + x^3) - H(3 + x^2)$, comme $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow]3; +\infty[\\ x \longmapsto 3 + x^3 \end{cases}$, $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow]3; +\infty[\\ x \longmapsto 3 + x^2 \end{cases}$ et $H:]3; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables, par composée et par somme, $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ et pour tout $x > 0$,

$$\boxed{\varphi'(x) = 3x^2 H'(3 + x^3) - 2x H'(3 + x^2) = 3x^2 h(3 + x^3) - 2x h(3 + x^2)}$$

16. Comme $-4 = 4e^{i\pi}$, le cours affirme que les racines n -ièmes de -4 sont $\sqrt[n]{4} e^{i\frac{\pi}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. En particulier, les racines carrées de -4 sont $\boxed{2i \text{ et } -2i}$.

17. Soit $x \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$

- (a) $\frac{2x - 5}{x - 2} = 0$ ssi $2x - 5 = 0$ ssi $x = 5/2$. La seule solution est $\boxed{x = 5/2}$.
- (b) $\frac{2x - 5}{x - 2} = 1$ ssi $2x - 5 = x - 2$ ssi $x = -2 + 5$ ssi $x = 3$. La seule solution est $\boxed{x = 3}$.
- (c) $\frac{2x - 5}{x - 2} = 2$ ssi $2x - 5 = 2(x - 2)$ ssi $2x - 5 = 2x - 4$ ssi $-5 = -4$. $\boxed{\text{Cette équation n'a pas de solution.}}$

- (d) $\frac{2x-5}{x-2} = x$ ssi $2x-5 = x(x-2)$ ssi $x^2-4x+5=0$. Ceci est une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 16-20 = -4$, en posant alors $\delta = 2i$, on a $\Delta = \delta^2$, ainsi les solutions sont :

$$\frac{4+2i}{2} = 2+i \quad \text{et} \quad \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

Remarquons qu'aucune de ces solutions ne vaut 2, ainsi les solutions de l'équation $\frac{2x-5}{x-2} = x$ sont $\boxed{2-i \text{ et } 2+i}$.

18. On dit que f est bijective de I sur J si :

$$\boxed{\forall y \in J \quad \exists ! x \in I \quad y = f(x)}$$

19. Supposons $f: I \rightarrow J$ est bijective. Soit $y \in J$, alors il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$, on pose alors $\boxed{f^{-1}(y) = x}$, et ce pour tout $y \in J$, on a donc défini $\boxed{f^{-1}: J \rightarrow I}$.

20. Comme l'équation $h(x) = 2$, on peut déjà affirmer que $h: D \rightarrow D$. Soit $y \in D$ et $x \in D$, alors :

$$\begin{aligned} y = h(x) &\iff y = \frac{2x-5}{x-2} &\iff (x-2)y = 2x-5 &\iff xy - 2y = 2x-5 \\ &\iff x(y-2) = -5+2y &\iff x = \frac{2y-5}{y-2} \end{aligned}$$

Remarquons que la dernière équivalence est bien licite car $y \neq 2$. Ainsi, pour tout $y \in D$, on a trouvé un seul antécédent de y par la fonction h qui vaut $x = \frac{2y-5}{y-2} = h(y)$, comme l'équation $h(y) = 2$ n'a pas de solution, on en déduit que $x \in D$. Dès lors, pour tout $y \in D$, il existe un unique $x \in D$ tel que $y = h(x)$. De plus, $x = h(y)$. Par conséquent, $\boxed{h: D \rightarrow D \text{ est bijective}}$ et $h^{-1}: y \mapsto h(y)$. Ainsi, $\boxed{h^{-1} = h}$.

21. Soit $n \in \mathbb{Z} \cap D$ Supposons que $h(n) \in \mathbb{Z}$, alors $h(n) = 2 + \frac{-1}{n-2} \in \mathbb{Z}$ donc $\frac{1}{n-2} = 2 - h(n) \in \mathbb{Z}$ donc $n-2$ divise 1, donc $n-2 = 1$ ou $n-2 = -1$ d'où $n = 3$ ou $n = 1$. Réciproquement, si $n = 3$, alors $h(n) = 1 \in \mathbb{Z}$ et si $n = 1$, alors $h(n) = 3 \in \mathbb{Z}$. Dès lors, l'ensemble des $n \in \mathbb{Z} \cap D$ tels que $h(n) \in \mathbb{Z}$ est exactement $\boxed{\{1, 3\}}$.

22. $u_1 = h(u_0) = h(0) = 5/2$, $u_2 = h(5/2) = \frac{2 \times 5/2 - 5}{5/2 - 2} = 0$, $u_3 = h(u_2) = h(0) = 5/2$.

23. On conjecture que $u_n = 0$ dès que n est pair et que $u_n = 5/2$ si n est impair. Posons l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(p)$, « $u_{2p} = 0$ » Alors, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car $u_0 = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. Calculons $u_{2(p+1)}$:

$$u_{2(p+1)} = u_{2p+2} = h(u_{2p+1}) = h(h(u_{2p})) \underset{\mathcal{P}(p)}{=} h(h(0)) = h(5/2) = h(u_1) = u_2 = 0$$

Dès lors, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ et alors $u_n = u_{2p} = 0$, si n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$ et alors $u_n = u_{2p+1} = h(u_{2p}) = h(0) = 5/2$.

24. On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ si n est pair et que $u_n = u_1$ si n est impair. Posons l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(p)$, « $u_{2p} = u_0$ » Alors, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car $u_0 = u_0$. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. Calculons $u_{2(p+1)}$:

$$u_{2(p+1)} = u_{2p+2} = h(u_{2p+1}) = h(h(u_{2p})) \underset{\mathcal{P}(p)}{=} h(h(u_0)) = h^{-1}(h(u_0)) = u_0$$

Où l'on a utilisé que $h = h^{-1}$ d'après la question 20. Dès lors, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} = u_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ et alors $u_n = u_{2p} = u_0$, si n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$ et alors $u_n = u_{2p+1} = h(u_{2p}) = h(u_0) = u_1$.

Avec $u_1 = \frac{2u_0-5}{u_0-2}$.

25. Soit $w \in \mathbb{C}$, $h(w)$ est défini ssi $cw + d \neq 0$ ssi $w \neq -\frac{d}{c}$ ($c \neq 0$). Ainsi, l'ensemble de définition de h est $D_h = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.
26. Soit $w \in D_h$, alors $h(w) = w$ ssi $aw + b = w(cw + d)$ ssi $cw^2 + w(d - a) - b = 0$. Or, ceci est une équation du second degré, il y a donc deux solutions complexes lorsque le discriminant $\Delta = (d - a)^2 + 4bc \neq 0$ et une seule solution complexe si $\Delta = 0$.

Cependant¹, on cherche les solutions non pas dans $\mathbb{C}$ mais dans D_h . Or, si $-\frac{d}{c}$ était solution de l'équation du second degré, cela ne serait pas pour autant une solution de l'équation $h(w) = w$. Calculons, alors

$$c \left(-\frac{d}{c} \right)^2 + \left(-\frac{d}{c} \right) (d - a) - b = \frac{d^2 - d(d - a) - bc}{c} = \frac{ad - bc}{c} \neq 0$$

Ainsi, $-\frac{d}{c}$ n'est jamais solution de l'équation du second degré, on obtient donc autant de solution à l'équation $h(w) = w$ sur D_h que de solution de $cw^2 + w(d - a) - b = 0$ dans $\mathbb{C}$. Ainsi, si $(d - a)^2 + 4bc = 0$ l'équation $h(w) = w$ a une seule solution, et si $(d - a)^2 + 4bc \neq 0$, l'équation $h(w) = w$ a deux solutions distinctes.

27. L'image de f est $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$.
28. Soit $y \in \mathbb{C}$ et $x \in D_h$, alors :

$$y = h(x) \iff y = \frac{ax + b}{cx + d} \iff y(cx + d) = ax + b \iff x(cy - a) = b - dy$$

Il y a alors deux cas :

- Si $y = a/c$, alors $0 = x(cy - a)$ tandis que

$$b - dy = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc - ad}{c} \neq 0$$

et l'équation $y = h(x)$ n'a donc pas de solution. Ainsi, $y = a/c$ n'est pas dans l'image de h .

- Si $y \neq a/c$, alors $cy - a \neq 0$ et on peut diviser par $cy - a$, ainsi en reprenant nos équivalences, $y = h(x)$ ssi $x = (b - dy)/(cy - a)$. Il reste donc à vérifier que $(b - dy)/(cy - a) \in D_h$. Or,

$$\frac{b - dy}{cy - a} = -\frac{d}{c} \iff c(b - dy) = -d(cy - a) \iff ad - cb = 0$$

Ce qui est exclu, ainsi, $x = (b - dy)/(cy - a) \in D_h$ et donc y est bien dans l'image car $y = h(x)$ avec $x \in D_h$.

On peut en conclure que $h(D_h) = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$.

29. La question précédente a montré que $h: D_h \rightarrow h(D_h) = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. De plus :

$$\forall y \in h(D_h) \quad \forall x \in D_h \quad y = h(x) \iff x = \frac{b - dy}{cy - a}$$

Ceci montre que h est une bijection de D_h vers $h(D_h)$ et que sa bijection réciproque est :

$$h^{-1}: \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \\ y \longmapsto \frac{-dy + b}{cy - a} \end{cases}$$

On note $a' = -d$, $b' = b$, $c' = c$ et $d' = -a'$, alors $h^{-1}: w \mapsto \frac{a'w + b'}{c'w + d'}$ est bien une homographie.

30. Soit $\omega \in \mathbb{C}$, alors $(g \circ h)(\omega)$ est bien défini ssi $\omega \in D_h$ et $h(\omega) \in D_g = \mathbb{C} \setminus \{-d'/c'\}$. Il y a deux cas :

1. Et c'est assez subtile.

- Si $-d'/c' = a/c$, alors pour tout $\omega \in D_h$, $h(\omega) \neq a/c = -d'/c'$, ainsi dans ce cas, $g \circ f$ a pour ensemble de définition $D_{g \circ f} = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$
- Si $-d'/c' \neq a/c$, alors il existe un unique $\omega \in D_h$ tel que $h(\omega) = -d'/c'$ (c'est $h^{-1}(-d'/c')$), dans ce cas, $g \circ f$ a pour ensemble de définition $D_{g \circ f} = \mathbb{C} \setminus \{-d/c, h^{-1}(-d'/c')\}$.

Soit $\omega \in D_{g \circ f}$,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\omega) &= g(f(\omega)) = \frac{a'f(\omega) + b'}{c'f(\omega) + d'} = \frac{a'\frac{aw+b}{cw+d} + b'}{c'\frac{aw+b}{cw+d} + d'} = \frac{a'(aw+b) + b'(cw+d)}{c'(aw+d) + d'(cw+d)} \\ &= \frac{(a'a + b'c)w + a'b + b'd}{(c'a + d'c)w + c'b + dd'} \end{aligned}$$

En posant $\alpha = a'a + b'c$, $\beta = a'b + b'd$, $\gamma = c'a + d'c$ et $\delta = c'b + dd'$, $g \circ f: \omega \mapsto \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ est bien une homographie.

31. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1} - z_1}{v_{n+1} - z_2} = \frac{\frac{av_n + b}{cv_n + d} - z_1}{\frac{av_n + b}{cv_n + d} - z_2} = \frac{av_n + b - z_1(cv_n + d)}{av_n + b - z_2(cv_n + d)} = \frac{(a - cz_1)v_n + b - dz_1}{(a - cz_2)v_n + b - dz_2}$$

Remarquons que comme $h(z_1) = z_1 \in h(D_h) = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, ainsi $z_1 \neq a/c$, ceci prouve que $a - cz_1 \neq 0$. Pour les mêmes raisons, $a - cz_2 \neq 0$, ainsi :

$$w_{n+1} = \frac{a - cz_1}{a - cz_2} \times \frac{v_n + \frac{b - dz_1}{a - cz_1}}{v_n + \frac{b - dz_2}{a - cz_2}}$$

Comme $h(z_1) = z_1$, en appliquant h^{-1} , on obtient $z_1 = h^{-1}(z_1) = \frac{-dz_1 + b}{cz_1 - a}$, de même pour z_2 , ainsi

$$w_{n+1} = \frac{a - cz_1}{a - cz_2} \times \frac{v_n - z_1}{v_n - z_2} = \frac{a - cz_1}{a - cz_2} w_n$$

Ceci prouve que $(w_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{a - cz_1}{a - cz_2}$.

32. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \left(\frac{a - cz_1}{a - cz_2}\right)^n w_0$.

33. D'après ce qui précède, $\frac{v_n - z_1}{v_n - z_2} = w_n$, ainsi $v_n - z_1 = (v_n - z_2)w_n$, dès lors, $v_n(1 - w_n) = z_1 - z_2w_n$.

Notons alors que w_n est différent de 1, en effet si $w_n = 1$, alors $v_n(1 - w_n) = 0$ tandis que $z_1 - z_2w_n = z_1 - z_2 \neq 0$. Ainsi, on peut diviser par $1 - w_n$, dès lors, et donc $v_n = \frac{z_1 - z_2w_n}{1 - w_n}$ avec la valeur de w_n trouvé à la question précédente, on a alors une expression explicite de v_n .

34.