DM2

À rendre le vendredi 6 Novembre 2026

Consignes : ce devoir est long, vous n'avez pas à tout faire, le but est que chacun puisse s'entraîner à son niveau, pour vous aider dans votre choix :

- L'exercice 0 n'a pas beaucoup d'intérêt sauf si vous avez du mal avec les intégrales.
- L'exercice 1 il est conseillé de résoudre cette équation différentielle seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ si vous avez des difficultés en maths. La résolution sur $\mathbb{R}$ est plus difficile et est conseillé plutôt pour les meilleurs.
- L'exercice 2 n'est pas difficile et n'a pas beaucoup d'intérêt, c'est juste pour vous faire réviser les équations différentielles du second ordre à coefficients constant.
- L'exercice 3 traite des intégrales de Wallis, c'est un grand classique de concours et est conseillé pour tout le monde.
- L'exercice 4 est un exercice pas trop difficile pour réviser l'étude des fonctions et un peu les images réciproques.
- L'exercice 5 est plus difficile, il est conseillé aux meilleurs.

Exercice 0 : ne pas traiter sauvagement ces primitives

1. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - x - 20}$ en précisant le ou les intervalles.
2. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 3x + 3}$ en précisant le ou les intervalles.
3. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2 + 12x + 36}\,\mathrm{d}x$.
4. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$
5. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$.
6. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x - 3\mathrm{i}}$.
7. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de $x = \sin(t)$.
8. À l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$, calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x + 3x\ln(x)}$
9. À l'aide d'un changement de variable, calculer une primitive de $x \mapsto \cos(\ln(x))$

Exercice 1 : Raccordement ~~à la fibre~~ en 0

On considère l'équation différentielle $xy' - 2y = x^3$ notée (E).

1. Soit I valant $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, résoudre (E) sur I.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Se garer au port

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre le problème de Cauchy : $y''(t) - y'(t) - 12y(t) = a\cos(t) \quad \text{et} \quad y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 3 : Wallis in wonderland (merci à Armand Mabondzo pour l'idée du titre)

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Grâce à la formule du binôme de Newton, linéariser $\cos^2(t)$, $\cos^3(t)$, $\cos^4(t)$, $\cos^5(t)$ et $\cos^6(t)$.

Remarque 1. On ne connaît pas de primitives explicites de $t \mapsto \cos^n(t)$ pour un entier n quelconque.

2. Calculer W_0, W_1, W_2, W_3 et W_4.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Montrer que $(W_n)_n$ est décroissante.
5. En déduire que $(W_n)_n$ est une suite convergente.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler une primitive de cos et donner la dérivée de $t \mapsto \cos^{n+1}(t)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
   Indication : se rappeler que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$
9. Montrer que $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Que vaut cette constante ?
10. Soit $p \in \mathbb{N}$, exprimer à l'aide de factorielles les produits suivants :
    - $1 \times 2 \times \ldots \times p = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} k$
    - $2 \times 4 \times 6 \ldots \times (2p) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (2k)$
    - $1 \times 3 \times 5 \ldots \times (2p+1) = \displaystyle\prod_{k=0}^{p} (2k+1)$
11. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer W_{2p} en fonction de W_{2p-2} puis en fonction de W_{2p-4} en réitérant le processus exprimer W_{2p} en fonction de W_0 et de certaines factorielles et de puissances.

Le raisonnement que l'on vient de faire peut sembler peu rigoureux avec l'usage des ... on peut rendre ça rigoureux en laissant cette partie au brouillon et procéder comme suit :

12. Montrer, par récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a
$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!},$$
13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$
14. Déduire de la question 13 que $(W_{n+1}/W_n)_n$ converge et en déduire sa limite.

Exercice 4 : Arccos, Arctan et ~~Arkenstone~~

1. Soit $f\colon E \to F$ une fonction avec $B \subset F$ et $x \in E$, complétez l'équivalence : $\quad x \in f^{-1}(B) \quad \iff$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, posons, lorsque cela a un sens, $f(z) = \dfrac{2z}{1+z^2}$, quel est l'ensemble de définition de f ?
3. On pose $g = f_{|\mathbb{R}}$, quel est l'ensemble de définition de g ?
4. En utilisant votre réponse de la question 1, et des équivalences, déterminer les ensembles suivants :
   (a) $g^{-1}(\{1/2\})$
   (b) $g^{-1}([-1\,;1])$
   (c) $g^{-1}(\{-1,1\})$
   (d) $g^{-1}(]-1\,;1[)$
   (e) $f^{-1}(\{4/3\})$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $\dfrac{2z^n}{1+z^{2n}} = 4/3$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
6. Déterminer l'ensemble $g(\mathbb{R})$ (on démontrera le résultat par double inclusion).
7. Démontrer que $g_{|[-1\,;1]}\colon [-1\,;1] \to [-1\,;1]$ est une bijection et trouver sa bijection réciproque.
8. Démontrer que $g_{|]-\infty\,;-1]}\colon]-\infty\,;-1] \to [-1\,;0[$ est une bijection et trouver sa bijection réciproque.
9. La fonction g réalise-t'elle une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R})$?

On pose $h\colon x \mapsto \arccos\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) + 2\arctan(x)$

10. Déterminer l'ensemble de définition de h noté D.
11. Calculer les valeurs de $h(0)$, $h(1)$, $h(-1)$, $h(\sqrt{3})$, $h(-\sqrt{3})$.
12. Démontrer que h est dérivable sur $D' = D\backslash\{-1,1\}$, et calculer $h'(x)$ pour $x \in D'$.
13. Démontrer que h est constante sur $[-1\,;1]$ et calculer $h(x)$ pour $x \in [-1\,;1]$
14. Déterminer la valeur de $h(x)$ pour $x \geqslant 1$ et $x \leqslant -1$.
15. Justifier que h n'est pas dérivable en 1 et en -1.
16. Déterminer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.
17. Dessiner h sur un repère orthonormée, prendre deux carreaux par unité.

Exercice 5 : vous allez bégayer sur celui-là

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, montrer que

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$