Ensembles

Exercice 1 (⋆ Rai)**.** Soit $E = \{1, 2, 3\}$ un ensemble. Vrai ou faux ?

1. $1 \in E$
2. $1 \subset E$
3. $\{1\} \subset E$
4. $\varnothing \in E$
5. $\varnothing \subset E$
6. $\{\varnothing\} \subset E$
7. $1 \in \mathscr{P}(E)$
8. $\{1\} \in \mathscr{P}(E)$
9. $E \subset \mathscr{P}(E)$
10. $\{E\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$

Exercice 2 (⋆ Rai, Mod ©)**.**

1. Écrire $\mathbb{U}$ par compréhension puis par paramétrage.
2. Écrire $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ et $B = \{1, 2, 7, 14\}$ par compréhension.
3. Écrire les ensembles suivants par extension :

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x+5) = 14\} \quad \text{et} \quad D = \{x \in \mathbb{N} \mid x(2x+3) = 14\}$$

Exercice 3 (⋆ Rai, Cal)**.** Posons $A = \{(t+2, 3t+5) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x = y + 1\}$. Démontrer que $A = B$.

Exercice 4 (⋆ Rai)**.** Déterminer les ensembles suivants :

1. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\,0\,;n\,]$
2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\,0\,;1/n\,]$
3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\,0\,;1-1/n\,]$
4. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]\,0\,;1+1/n\,[$

Exercice 5 (⋆ Rai ©)**.** Soient E un ensemble et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que :

$$A \cup B = A \cap B \iff A = B$$

Exercice 6 (⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit E un ensemble et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Démontrer que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ Est-ce que $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$?

Exercice 7 (⋆⋆ Rep, Rec ©)**.** Notons $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Représenter C graphiquement.
2. Montrer qu'il n'est pas possible d'écrire $C = A \times B$ avec A et B deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (⋆ ⋆ ⋆ Rai, Rec, Mod)**.** Soit E un ensemble, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'un ensemble E_n tel que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et que $E_n \subset E_{n+1}$. Construire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un ensemble F_n tel que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ avec les F_n deux à deux disjoints.

Applications

Exercice 9 (⋆ Rai)**.** On pose $f = \cos$ et $g : x \mapsto 1/|x|$. Dans chacun des cas suivants, déterminer les ensembles proposés :

1. $f(\mathbb{R})$
2. $f^{-1}(\mathbb{R})$
3. $f(]\,0\,;2\pi\,[)$,
4. $f^{-1}(\{1\})$
5. $f^{-1}(]\,-1\,;2\,[)$
6. $f^{-1}(f([\,0\,;2\pi\,]))$,
7. $g(]\,0\,;1\,[)$
8. $g^{-1}(]\,-1\,;1\,[)$
9. $g^{-1}(]\,-\infty\,;0\,[)$

Exercice 10 (⋆ Rai, Cal)**.** Notons $E = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ et $F = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ Étudier l'injectivité/surjectivité/bijectivité des fonctions suivantes, déterminer alors la bijection réciproque :

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x^2+1} \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases}$
3. $h : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases}$
4. $u : \begin{cases} \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$
5. $v : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (2x+3y-1, x-y) \end{cases}$
6. $y : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} \end{cases}$
7. $w : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \exp(x^3) \end{cases}$
8. $z : \begin{cases} [\,0\,;2\,] \longrightarrow [\,0\,;2\,] \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 1 \\ 3-x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases} \end{cases}$
9. $\phi : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ f \longmapsto f' \end{cases}$
10. $\psi : \begin{cases} F \longrightarrow E \\ f \longmapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x f\right) \end{cases}$

Calculer $\psi \circ \phi$ et $\phi \circ \psi$.

Exercice 11 (⋆ Rai ©)**.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ et $g(n) = n/2$ si n est pair et $g(n) = (n+1)/2$ si n est impair.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sont-elles injectives ? surjectives ?
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 12 (⋆ Rai ©)**.** Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. Vrai ou faux ?

1. Si f est injective alors $f_{|A}$ est injective.
2. Si f est surjective alors $f_{|A}$ est surjective.
3. Si $f_{|A}$ est injective, alors f est injective.
4. Si $f_{|A}$ est surjective alors f est surjective.

Exercice 13 (⋆ Rai). Montrer la bijectivité des fonctions

$$f\colon \begin{cases}\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}^*\\ n\longmapsto n+1\end{cases},\qquad g\colon \begin{cases}\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}\\ n\longmapsto \begin{cases}n/2 & \text{si } n \text{ est pair}\\ (-1-n)/2 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}\end{cases}$$

$$h\colon \begin{cases}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\\ (n,p)\longmapsto 2^n(2p+1)-1\end{cases}$$

Exercice 14 (⋆⋆ Rai ©). On note $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\Phi\colon \begin{cases}E\longrightarrow E\\ f\longmapsto (x\mapsto f(2x))\end{cases}$ est bijective et trouver sa bijection réciproque.

Exercice 15 (⋆ Rai ©). Soit $f\colon E\to E$ une application telle que $f\circ f\circ f=\mathrm{Id}_E$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 16 (⋆⋆ Rai ©). Soient E et F deux ensembles et $f\colon E\to F$.

1. Soit $A\in\mathscr{P}(E)$, montrer que $A\subset f^{-1}(f(A))$ mais que l'inclusion réciproque peut être fausse.
2. Soit $B\in\mathscr{P}(F)$, montrer que $f(f^{-1}(B))\subset B$, mais que l'inclusion réciproque peut être fausse.
3. Montrer que f est injective ssi pour tout $A\in\mathscr{P}(E)$, $A=f^{-1}(f(A))$.
4. Monter que f est surjective ssi pour tout $B\in\mathscr{P}(F)$, $B=f(f^{-1}(B))$.

Exercice 17 (⋆ Rai). Soient E et F deux ensembles et $f\colon E\to F$.

1. Si $(B,B')\in\mathscr{P}(F)^2$, montrer que $f^{-1}(B\cap B')=f^{-1}(B)\cap f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B\cup B')=f^{-1}(B)\cup f^{-1}(B')$.
2. Est-ce que $f(A\cap A')=f(A)\cap f(A')$ et $f(A\cup A')=f(A)\cup f(A')$ pour tout A et A' deux parties de E ?

Exercice 18 (⋆ Rai). Soient $f\in\mathscr{F}(E,F)$ et $g\in\mathscr{F}(F,G)$. Montrer que :

1. Si $g\circ f$ est injective de E dans G alors f est injective de E dans F.
2. Si $g\circ f$ est surjective de E dans G alors g est surjective de F dans G.

Exercice 19 (⋆ Rai). Soit E un ensemble. Pour tout $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$, on pose $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

1. Montrer que $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$
2. Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B$.

Exercice 20 (⋆⋆ Rai, Rec). On pose $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, on pose $f_1=f$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_{n+1}=f\circ f_n$. Déterminer l'ensemble de définition de f_n ainsi que l'expression de cette fonction.

Exercice 21 (⋆⋆ Rai, Cal ©). Pour $z\neq \mathrm{i}$, on pose $f(z)=\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ et $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ et $P=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)<0\}$. Montrer que $f(D)\subset P$ puis que f est une bijection de D dans P.

Exercice 22 (⋆⋆ Rec ©). Soit $f\colon E\to E$ telle que $f\circ f=f$. Montrer que si f est injective ou surjective alors $f=\mathrm{Id}_E$.

Exercice 23 (⋆⋆ Rai, Rec ©). Soit $f\colon E\to E$ et $p\in\mathbb{N}^*$, on note $f^p=f\circ f\circ\ldots\circ f$ (f composée avec elle-même p fois). On suppose que f^p admet un unique point fixe (c'est-à-dire qu'il existe un unique $x\in E$ tel que $f^p(x)=x$). Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 24 (⋆⋆⋆ Rec, Rai). Soit E un ensemble et $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$. On pose $f\colon \begin{cases}\mathscr{P}(E)\longrightarrow\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B)\\ X\longmapsto (X\cap A, X\cap B)\end{cases}$. Déterminer une CNS sur A et B pour que f soit injective et une autre CNS pour que f soit surjective.

Exercice 25 (⋆⋆ Rec ©). Soit $f\colon E\to F$.

1. Montrer que f est injective ssi il existe $g\in E^F$ telle que $g\circ f=\mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que f est surjective ssi il existe $g\in E^F$ telle que $f\circ g=\mathrm{Id}_F$.

Exercice 26 (⋆⋆⋆ Rec, Rai). Soit E un ensemble et $f\colon E\to\mathscr{P}(E)$.

1. Notons $Y=\{x\in E\mid x\notin f(x)\}$. Montrer que $Y\notin f(E)$.
2. Une application $f\colon E\to\mathscr{P}(E)$ peut-elle être surjective/bijective ?
3. Donner un exemple de fonction $f\colon E\to\mathscr{P}(E)$ injective.

Exercice 27 (⋆⋆⋆ Rec, Rai). Soient E et F deux ensembles, et deux injections $i\colon E\to F$, $j\colon F\to E$. On pose $A_0=E\backslash j(F)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_{n+1}=(j\circ i)(A_n)$, $B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ et $C=E\backslash B$.

1. Montrer que, pour tout $x\in C$, il existe un unique $z\in F$ tel que $x=j(z)$.

On pose alors $\varphi(x)=z$ pour $x\in C$, sinon on pose $\varphi(x)=i(x)$. Ainsi, $\varphi\colon E\to F$.

2. Montrer que $\varphi_{|B}$ et $\varphi_{|C}$ sont injectives.
3. Soit $x\in C$ et $y\in B$ tels que $\varphi(x)=\varphi(y)$. Démontrer que $x=(j\circ i)(y)$.
4. Montrer que φ est bijective (théorème de Cantor-Bernstein).