Chapitre 6
Somme, produit, petits systèmes linéaires, arithmétique

Dans ce chapitre, nous allons voir les sommes et les produits, les petits systèmes linéaires et des bases d'arithmétique.



Attention : utiliser un lecteur de PDF adapté

Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de PDF capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1 Sommes et Produits **2**
- 1.1 Définitions, propriétés et méthodes doubles . . . 2
- 1.2 Sommes doubles . . . 5
- 1.3 Factorielle, coefficient binomial, binôme de Newton . . . 6

2 Petits systèmes linéaires **7**
- 2.1 Définition et interprétation géométrique . . . 7
- 2.2 Algorithme de résolution des systèmes linéaires . . . 8

3 Arithmétique **9**
- 3.1 Diviseur, multiples et division euclidienne . . . 9
- 3.2 PGCD et PPCM . . . 10
- 3.3 Nombres premiers . . . 11

1 Sommes et Produits

1.1 Définitions, propriétés et méthodes doubles

Définition d'une famille

Soit I un ensemble fini. Si pour tout $i \in I$, on dispose d'un élément a_i, alors, la collection de tous ces a_i est appelée **famille** finie indexée par I et est notée $(a_i)_{i\in I}$.

Définition de la somme et du produit d'une famille

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. On note, $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$ et $\prod_{i\in I} a_i$ le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$. Par **convention**, si $I = \varnothing$, $\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\prod_{i\in I} a_i = 1$.

Exemple 1. Si $I = \{3;5;7;11\}$, $a_3 = 5$, $a_5 = 6$, $a_7 = 7$ et $a_{11} = 7$, alors $\sum_{i\in I} a_i =$ et $\prod_{i\in I} a_i =$.

Remarques 1.

- Si $I = [\![\, m\,;n\,]\!] = \{m; m+1; \dots; n-1; n\}$ avec $m \leqslant n$, on note aussi

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I} a_i = \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n \qquad (n-m+1 \text{ termes})$$

- L'indice i est un indice «muet» : on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non encore utilisé :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m}^{n} a_j = \prod_{k=m}^{n} a_k$$

Ainsi, Le nombre $\sum_{i=m}^{n} a_i$ dépend de m et de n mais pas de i. Écrire cette $\sum_{i=m}^{n} a_i$ en fonction de i est donc une erreur.

Exemple 2.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} 1$
2. Calculer $\prod_{k=0}^{n} 2$
3. Prouver $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Proposition n° 1 : règles de calculs pour la somme et pour le produit

Soient I un ensemble fini à p éléments $(a_k)_{k\in I}$, $(b_k)_{k\in I}$ deux familles de nombres de $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\sum_{k\in I} (\lambda a_k + b_k) = \lambda \sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in I} b_k$ (linéarité de la somme)
2. $\operatorname{Re}\left(\sum_{k\in I} a_k\right) = \sum_{k\in I} \operatorname{Re}(a_k)$
3. $\operatorname{Im}\left(\sum_{k\in I} a_k\right) = \sum_{k\in I} \operatorname{Im}(a_k)$
4. $\prod_{k\in I} (a_k b_k) = \left(\prod_{k\in I} a_k\right) \times \left(\prod_{k\in I} b_k\right)$
5. $\prod_{k\in I} (\lambda a_k) = \lambda^p \prod_{k\in I} a_k$

Changement d'indice

Pour effectuer un changement d'indice, on définit le nouvel indice (entier) en fonction de l'ancien indice. Puis on exprime la somme avec ce nouvel indice en veillant à changer les bornes de la somme et le terme sous la somme en fonction du nouvel indice.
Formellement, si $\varphi : J \to I$ est une bijection entre deux ensembles finis, $\sum_{j\in J} a_{\varphi(j)} = \sum_{i\in I} a_i$.

Exemples 3. 1. Effectuer un changement d'indice dans $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}$ puis dans $\sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$.

2. À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, retrouver la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

Séparation/regroupement de termes

On peut décomposer la somme de départ en plusieurs sommes plus simples à calculer ou au contraire regrouper plusieurs sommes en une seule. Formellement, si $I = J \cup K$ avec J et K disjoints, alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_j + \sum_{k\in K} a_k$.

Exemples 4. 1. Couper $\sum_{k=1}^{2n} u_k$ en deux sommes ayant le même nombres de termes.

2. Couper $\sum_{k=1}^{2n+1} u_k$ en isolant le terme au milieu.

3. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$, où $\min(k, n)$ est le minimum des entiers k et n.

4. Couper $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en deux sommes, l'une avec des indices pairs et l'autre avec des indices impairs.

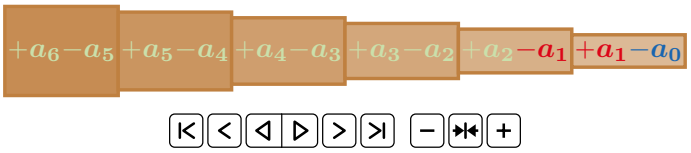
Exemple 5. $(a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) = a_5 - a_2$ et si a_2, a_3 et a_4 sont non nuls, $\frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_5}{a_2}$

Proposition n° 2 : somme et produit télescopiques

Soit $(a_k)_{m\leqslant k\leqslant n+1}$ une famille de nombres, $\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$, si tous a_i sont non nuls, $\prod_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$.

Démonstration de la proposition n° 2 : Par linéarité de la somme, puis par changement d'indice puis par séparation de somme :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+1}^{n+1} a_j - \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+1}^{n} a_j + a_{n+1} - \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k + a_m \right) = a_{n+1} - a_m \quad \blacksquare$$



Exemples 6.

1. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ 2. En déduire la limite de la suite $(S_n)_n$ 3. Calculer $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

Proposition n° 3 : somme de termes d'une suite arithmétique

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors pour $n \geqslant m$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{u_m + u_n}{2} \times (n - m + 1) = \frac{\text{premier terme sommé} + \text{dernier terme sommé}}{2} \times (\text{nombre de termes sommés})$$

Démonstration de la proposition n° 3 : Notons r la raison de cette suite. Calculons le double cette somme en effectuant un changement d'indice $j = n + m - k$ dans la seconde somme :

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=m}^{n} u_k &= \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{j=m}^{n} u_{n+m-j} = \sum_{k=m}^{n} u_k + \sum_{k=m}^{n} u_{n+m-k} = \sum_{k=m}^{n} (u_k + u_{n+m-k}) \\ &= \sum_{k=m}^{n} ([u_m + (k-m)r] + [u_n + (m-k)r]) = \sum_{k=m}^{n} (u_m + u_n) = (u_m + u_n)(n - m + 1) \end{aligned}$$

En divisant par 2, on obtient le résultat. ■

Exemple 7. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k$.

Proposition n° 4 : somme de termes d'une suite géométrique

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour $n \geqslant m$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1-q} = \text{premier terme sommé} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes sommé}}}{1 - \text{raison}}$$

Dans le cas où $q = 1$ (suite constante), $\sum_{k=m}^{n} u_k = (n - m + 1)u_m$.

Démonstration de la proposition n° 4 : Si $q \neq 1$, alors :

$$(1-q)\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{q=m}^{n} (1-q)u_k = \sum_{q=m}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_m - u_{n+1} = u_m - u_m q^{n+1-m} = u_m(1 - q^{n+1-m})$$

En divisant par $1 - q$, on obtient le résultat. Si $q = 1$, alors

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_m = u_m(n - m + 1)$$

■

Exemple 8.

1. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$.
2. En déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Soit $x \in \mathbb{C}$, calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} x^i$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme des racines n-ièmes de l'unité.

Calcul de somme de cosinus/sinus

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

Exemple 9. $(a-b)(a+b) =$ $(a-b)(a^2+ab+b^2) =$ $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) =$

Proposition n° 5 : identité remarquable

Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux nombres réels ou complexes, alors $a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$

Démonstration de la proposition n° 5 : En partant du membre de gauche et en utilisant la linéarité, on reconnaît une somme télescopique :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (a-b)a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{a^{k+1}b^{n-1-k}}_{=u_{k+1}} - \underbrace{a^k b^{n-k}}_{=u_k} = \underbrace{a^n}_{u_n} - \underbrace{b^n}_{u_0}$$

■

Exemple 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la dérivabilité de $p_n : x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$.

1.2 Sommes doubles

Définition d'une somme double

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de complexes pour I et J deux ensembles finis. On dit que $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ est une **somme double**.
Si $I=[\![\,m\,;n\,]\!]$ et $J=[\![\,p\,;q\,]\!]$, on note $\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{i,j}$ au lieu de $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$. Si $I=J=[\![\,m\,;n\,]\!]$, on note $\sum_{m\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$.

	p	$p+1$	$\dots$	j	$\dots$	q	Totaux par ligne
m	$a_{m,p}$	$a_{m,p+1}$	$\dots$	$a_{m,j}$	$\dots$	$a_{m,q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{m,j}$
$m+1$	$a_{m+1,p}$	$a_{m+1,p+1}$	$\dots$	$a_{m+1,j}$	$\dots$	$a_{m+1,q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{m+1,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
i	$a_{i,p}$	$a_{i,p+1}$	$\dots$	$a_{i,j}$	$\dots$	$a_{i,q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{i,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
n	$a_{n,p}$	$a_{n,p+1}$	$\dots$	$a_{n,j}$	$\dots$	$a_{n,q}$	$\sum_{j=p}^{q} a_{n,j}$
Totaux par colonne	$\sum_{i=m}^{n} a_{i,p}$	$\sum_{i=m}^{n} a_{i,p+1}$		$\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}$		$\sum_{i=m}^{n} a_{i,q}$	

(a) Somme indexée par un rectangle

	m	$m+1$	$\cdots$	j	$\cdots$	n	Totaux par ligne
m	$a_{m,m}$	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	$a_{m,j}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	$\sum_{j=m}^{n} a_{m,j}$
$m+1$		$a_{m+1,m+1}$	$\cdots$	$a_{m+1,j}$	$\cdots$	$a_{m+1,n}$	$\sum_{j=m+1}^{n} a_{m+1,j}$
$\vdots$			$\ddots$			$\vdots$	
i				$\ddots$		$a_{i,n}$	$\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$	
n						$a_{n,n}$	$\sum_{j=n}^{n} a_{n,j}$
Totaux par colonne	$\sum_{i=m}^{m} a_{i,m}$	$\sum_{i=m}^{m+1} a_{i,m+1}$		$\sum_{i=m}^{j} a_{i,j}$		$\sum_{i=m}^{n} a_{i,n}$	

(b) Somme indexée par un triangle

Proposition n° 6 : somme double indexée par un rectangle

Soient m,n,p,q des entiers et $(a_{i,j})_{i,j}$ une famille de complexes indexée par le rectangle $[\![\,m\,;n\,]\!]\times[\![\,p\,;q\,]\!]$. Alors :

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q} a_{i,j}\right) = \sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}\right)$$

Proposition n° 7 : somme double indexée par un triangle

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{i,j}$ une famille de complexes indexée par le triangle $\{(i,j) \mid m \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$. Alors :

$$\sum_{m \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=m}^{n} \left(\sum_{i=m}^{j} a_{i,j} \right)$$

Exemple 11. Calculer $S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$.

Remarque 2. Les propositions 6 et 7 restent vraies si on remplace les somme doubles par les produits doubles.

Théorème n° 1 : produit de deux sommes

Soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ deux familles de nombres complexes : $\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{p} b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_i b_j$

Exemple 12. Calculer $(a+b+c)^2$, puis $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2$

1.3 Factorielle, coefficient binomial, binôme de Newton

Définition de la factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** de n l'entier $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Exemple 13. Donner les valeurs de $1! =$ $2! =$ $3! =$ $4! =$ $5! =$ $0! =$

Remarque 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Définition du coefficient binomial

Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. On pose $\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0\,;n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ le **coefficient binomial** et se lit «p parmi n».

Exemple 14. Pour n dans $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, donner les valeurs de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n}$.

Proposition n° 8 : propriétés des coefficients binomiaux

Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour tout $p \in [\![0\,;n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie des coefficients binomiaux)
2. Pour tout $p \in [\![1\,;n]\!]$, $p \times \binom{n}{p} = n \times \binom{n-1}{p-1}$ (formule du maire)
3. Pour tout $p \in [\![1\,;n-1]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (formule du triangle de Pascal)

Remarque 4. La formule du triangle de Pascal permet le calcul des coefficients binomiaux et montre que $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Théorème n° 2 : formule du binôme de Newton

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et n un entier naturel, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Démonstration du théorème n° 2 : Posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$».

- Pour $n=0$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, tandis que $(a+b)^n = (a+b)^0 = 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a+b)a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(a^{k+1}b^{n-k} + a^k b^{n+1-k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} = \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right) + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^{n+1-(n+1)} + \binom{n+1}{0}a^{n+1-(n+1)b^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

Exemple 15. Développer l'expression $(x-1)^5$.

Sommes de coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$. En déduire $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$.

Exprimer $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$

Linéariser $\cos(\theta)^n$ (en séparant suivant la parité de n)

2 Petits systèmes linéaires

2.1 Définition et interprétation géométrique

Définition d'un système linéaire à deux inconnues

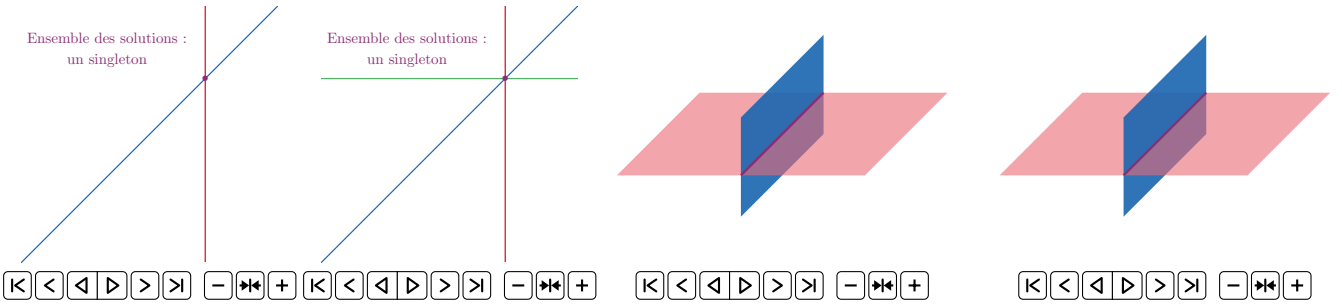
Soient $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{K}^9$. On dit que $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ est un **système linéaire de deux équations à deux inconnues**. On dit que $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \\ a_3 x + b_3 y = c_3 \end{cases}$ est un **système de trois équations à deux inconnues**. Les nombres x et y dans $\mathbb{K}$ sont les **inconnues** du système, les a_i, b_i sont les **coefficients** du système, les c_i sont les **seconds membres** du système. Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ qui vérifient ces deux ou trois équations.

Exemple 16. $\begin{cases} 2x+3y &= 2 \\ 2x+3y &= 3 \end{cases}$ est un système linéaire de 2 équations et 2 inconnues. $\begin{cases} 2x+3yx &= 2 \\ 2x+3y &= 3 \end{cases}$ n'est pas un système linéaire.

Définition d'un système linéaire à trois inconnues

Soient $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{K}^{12}$. On dit que $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$ est un **système linéaire de deux équations à trois inconnues**. On dit que $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ est un **système de trois équations à trois inconnues**. Les nombres x et y, z dans $\mathbb{K}$ sont les **inconnues** du système, les a_i, b_i et c_i sont les **coefficients** du système, les d_i sont les **seconds membres** du système. Résoudre un tel système c'est trouver tous les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ qui vérifient ces deux ou trois équations.

Remarque 5.
- Si $(a, b) \neq (0, 0)$, l'équation $ax + by = c$ est l'équation d'une droite. Résoudre un système linéaire à deux inconnues revient donc à chercher l'intersection de deux ou trois droites.
- Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ l'équation $ax + by + cz = d$ est l'équation d'un plan. Résoudre un système linéaire à trois inconnues revient donc à chercher l'intersection de deux ou trois plans.



(a) Système linéaire de deux équations à deux inconnues

(b) Système linéaire de trois équations à deux inconnues

(c) Système linéaire de deux équations à trois inconnues

(d) Système linéaire de trois équations à trois inconnues (coming soon)

FIGURE 1 – Interprétation graphique des solutions d'un système linéaire de deux/trois équations à deux/trois inconnues.

2.2 Algorithme de résolution des systèmes linéaires

Remarque 6. Le système $\begin{cases} 3x+2y+z &= 4 \\ y+z &= 2 \\ z &= 3 \end{cases}$ est facile à résoudre, $z = 3$, $y = -1$, $x = 1$.

Définition des opérations élémentaires

Soit un système avec 2/3 équations et 2/3 inconnues. Notons L_1, L_2 (et éventuellement L_3) les lignes du système. Alors on peut faire les **opérations élémentaires** sur ce système pour obtenir un nouveau système :

1. Échanger deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$
2. Multiplier une ligne par un nombre non nul : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$
3. Ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un nombre : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$

Théorème n° 3 : invariance des solutions par opérations élémentaires

Soit (S) un système linéaire et (S') un système obtenu à partir de (S) après une ou plusieurs opérations élémentaires. Alors (S) et (S') ont exactement les mêmes solutions.

Comment résoudre un système linéaire ?

1. Éliminer les inconnues de façon à échelonner le système en effectuant des opérations élémentaires. Échelonner le système veut dire qu'à chaque ligne, la première inconnue rencontrée doit être plus à droite qu'à la ligne précédente.
2. En «remontant», la première inconnue de chaque ligne s'expriment en fonction des autres inconnues.

Remarque 7. Si le système n'a aucune solution, on dit qu'il est **incompatible**.

Exemple 17. Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x & +5y & = & 12 \\ 2x & +3y & = & 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x & +2y & = & 10 \\ 2x & +2y & = & 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x & +3y & -z & = & -1 \\ 2x & +5y & +z & = & 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x & +3y & -z & = & -1 \\ 2x & +5y & +z & = & 0 \\ 3x & & +2z & = & 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x & +3y & -z & = & -1 \\ 2x & +5y & +z & = & 0 \\ 3x & +7y & +3z & = & 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x & +3y & -z & = & -1 \\ 2x & +5y & +z & = & 0 \\ 3x & +7y & +3z & = & 2 \end{cases}$

Attention à plusieurs choses

1. Si vous utilisez L_1 pour modifier L_2, alors n'utilisez en même temps pas L_2 pour modifier L_1 ou L_3.
2. Raisonner par équivalence et pas avec des «donc».
3. Indiquer les opérations effectuées en dessous de $\iff$.
4. Ne remontez le système que s'il est bien échelonné.
5. Ne pas faire $L_i \leftarrow \lambda L_i + L_j$ avec $\lambda = 0$ car vous allez perdre L_i.
6. Vous avez le droit d'utiliser deux lignes pour modifier une autre : $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 + 5L_2$.

3 Arithmétique

3.1 Diviseur, multiples et division euclidienne

Définition d'un diviseur d'un entier

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que b **divise** a/b est un **diviseur** de a/a est un **multiple** de b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$. On note alors $b|a$.

Exemples 18.

1. Donner l'ensemble des diviseurs de 0, 1, 5 et 12.
2. Donner l'ensemble des multiples de 0, 1 et 12.
3. Comment s'appellent les nombres divisibles par 2 ?

Proposition n° 9 : propriétés de la divisibilité

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

1. $a|b$ et $a|c \implies a|(db + c)$
2. $a|b$ et $c|d \implies (ac)|(bd)$
3. $(ab)|c \implies a|c$ et $b|c$
4. $a|b$ et $b|a \iff b = \pm a$
5. $a|b$ et $b|c \implies a|c$

Théorème n° 4 : division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Alors, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < |b|$.

Démonstration du théorème n° 4 : Montrons d'abord l'existence de la division euclidienne. Posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «il existe $(q,r)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $n=bq+r$ avec $0\leqslant r<|b|$». Pour $n=0$, il suffit de poser $q=r=0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Ainsi, il existe $(\tilde{q},\tilde{r})\in\mathbb{Z}^2$ tel que $n=b\tilde{q}+\tilde{r}$ avec $0\leqslant r<|b|$. Dès lors, $n+1=b\tilde{q}+\tilde{r}+1$, il y a donc deux cas :

- Si $\tilde{r}<|b|-1$, alors $\tilde{r}+1<|b|$, on pose alors $q=\tilde{q}$ et $r=\tilde{r}+1$ et on a bien $n+1=bq+r$ avec $0\leqslant r<|b|$.
- Si $\tilde{r}=|b|-1$, alors $n+1=b\tilde{q}+|b|=b(\tilde{q}\pm 1)$, (en effet $|b|=\pm b$), ainsi en posant $q=\tilde{q}\pm 1$ et $r=0$ on a bien $n+1=bq+r$ avec $0\leqslant r<b$.

On a donc montré que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Ainsi, si $a\in\mathbb{N}$, en appliquant $\mathscr{P}(a)$ on a démontré l'existence de la division euclidienne de a par b. Si $a<0$, alors $-a>0$ et il existe $(\tilde{q},\tilde{r})\in\mathbb{Z}^2$ tel que $-a=b\tilde{q}+\tilde{r}$ avec $0\leqslant\tilde{r}<|b|$. Donc $a=b(-\tilde{q})-\tilde{r}$, observons que si $\tilde{r}=0$, alors $a=bq+r$ avec $q=-\tilde{q}$ et $r=0$. Si $\tilde{r}>0$, alors $a=b(-\tilde{q})-|b|+(|b|-\tilde{r})$ posons $r=|b|-\tilde{r}$ de sorte que $0\leqslant r<|b|$ et $q=(-\tilde{q})+\pm 1$ de sorte que $a=bq+r$. Montrons l'unicité, si $a=bq+r=bq'+r'$ avec $(q,q',r,r')\in\mathbb{Z}^4$ et $0\leqslant r<|b|$ et $0\leqslant r<|b'|$, alors $r-r'=b(q'-q)$ avec $-|b|<r-r'<|b|$, donc $-|b|<b(q-q')<|b|$ donc $-1\leqslant\pm(q'-q)<1$ on en déduit que $q'-q=0$ donc que $q=q'$ puis que $r=r'$.

■

```
q,r = a//b, a%b#Commande python à connaître et fonctionne aussi si a ou b sont négatifs

def DivisionEuclidienne(a,b):
    """À la main: si (a,b)€NxN*, renvoie le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b"""
    r,q = a,0
    while
        r,q = r-b,q+1
    return q,r
```

Attention à ne pas confondre la division euclidienne et la divisibilité

La phrase «b divise a» est une proposition à laquelle on répond par oui ou par non. Effectuer la division euclidienne de a par b revient à trouver le quotient et le reste. Cependant, la proposition 10 fait lien entre les deux.

Proposition n° 10 : lien entre divisibilité et division euclidienne

Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. Alors $b|a$ ssi le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.

Démonstration de la proposition n° 10 : Si le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0, alors en notant $q\in\mathbb{Z}$ le quotient de cette division euclidienne $a=bq+0$ et donc b divise a. Réciproquement, si a divise b, alors il existe $q\in\mathbb{Z}$ tel que $a=bq$, alors $a=bq+r$ avec $r=0$ vérifiant $0\leqslant r<|b|$. Par unicité de la division euclidienne, q est le quotient et $r=0$ le reste de la division euclidienne de a par b. ■

3.2 PGCD et PPCM

Définition du PGCD de deux entiers

Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $a\neq 0$ ou $b\neq 0$. Alors, l'ensemble des diviseurs commun à a et b est fini et admet donc un plus grand élément. On appelle cet élément **plus grand diviseur commun** à a et b et on le note $\mathrm{PGCD}(a,b)$.

Exemples 19. $\mathrm{PGCD}(9,12)=$ pour tout $b\in\mathbb{Z}^*$, $\mathrm{PGCD}(0,b)=$

Lemme 1. Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, et $a=bq+r$ la division euclidienne de a par b. Alors $\mathrm{PGCD}(a,b)=\mathrm{PGCD}(b,r)$

Démonstration du lemme 1 : Soit d un diviseur commun de a et b, alors d divise $bq-a=d$, donc d est un diviseur comme de b et de r. Soit d un diviseur comme de b et de r, alors d divise $bq+r=d$, donc d est un diviseur commun de a et de b. Ainsi, comme les diviseurs commun de a et de b sont exactement les mêmes que les diviseurs communs de b et de r, en particuliers, ils ont le même plus grand diviseur commun. On a donc bien démontré que $\mathrm{PGCD}(a,b)=\mathrm{PGCD}(b,r)$.

Théorème n° 5 : algorithme d'Euclide

Soient $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. On pose $r_0=a$, $r_1=b$ et tant que $r_k\neq 0$, on définit r_{k+1} comme le reste de la division euclidienne de r_{k-1} par r_k. Alors, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $r_N\neq 0$ et $r_{N+1}=0$, de plus, $\mathrm{PGCD}(a,b)=|r_N|$.

Démonstration du théorème n° 5 : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n \neq 0$. Soit un entier $n \geqslant 2$, alors on fait la division euclidienne de r_{n-1} par r_n et on trouve un reste r_{n+1} qui vérifie $r_{n+1} < |r_n| = r_n$. Ainsi, $r_{n+1} \leqslant r_n - 1$. Par récurrence, on montre donc que pour tout entier $n \geqslant 2$, $0 < r_n \leqslant r_2 - n + 2$, Ainsi, pour $m = r_2 - 2 \in \mathbb{N}$, on obtient $0 < r_m \leqslant 0$ ce qui est absurde. Ainsi, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $r_m = 0$. Notons alors $N = \max k \in [\![0\,;m-1]\!] \mid r_k \neq 0$, alors $r_N \neq 0$ et $r_{N+1} = 0$. De plus, d'après le lemme 1, pour tout $k \in [\![1\,;N-1]\!]$,

$$\mathrm{PGCD}(r_{k-1}, r_k) = \mathrm{PGCD}(r_k, r_{k+1})$$

On en déduit donc que la suite finie $(\mathrm{PGCD}(r_k, r_{k+1}))_{0 \leqslant k \leqslant N}$ est constante. Il s'ensuit que $\mathrm{PGCD}(r_0, r_1) = \mathrm{PGCD}(r_N, r_{N+1})$. Par conséquent, $\mathrm{PGCD}(a,b) = r_N$. ■

Exemple 20. Calculer le PGCD de 42 et 68.

```
def AlgoEuclide(a,b):
    """Pour a et b deux entiers, renvoie leur PGCD"""
    L = [a,b]#Va contenir les restes successifs
    while L[len(L)-1] != 0:#Tant que le dernier reste est non nul
        L.append(L[len(L)-2]%L[len(L)-1])# On calcule le reste et on le rajoute
    return L[len(L)-2]#On renvoie l'avant dernier reste, car le dernier reste est nul
```

Définition du PPCM

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, l'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b admet un plus petit élément, on l'appelle **plus petit commun multiple** de a et b, notée $\mathrm{PPCM}(a,b)$.

Exemples 21. $\mathrm{PPCM}(-3,-5) =$ $\mathrm{PPCM}(12,40) =$

Remarque 8. Calculer le PPCM permet de remettre au même dénominateur deux fractions sans forcément effectuer le produit des dénominateurs.

3.3 Nombres premiers

Définition d'un nombre premier

Soit un entier $n \geqslant 2$, on dit que n est **premier** si les seuls diviseurs positifs de n sont 1 et n.

Exemple 22. Les nombres 2,5,7,11,13,17 sont premiers, 0, 1, 4, 9, 15 et 21 ne le sont pas.

Remarque 9. L'entier $n \geqslant 3$ est premier ssi il n'a pas de diviseurs dans $[\![2\,;E(\sqrt{n})]\!]$, ce qui mène à l'algorithme suivant :

Justification de la remarque 9 : Si n est premier, alors $\sqrt{n} < n$ et n n'admet aucun diviseur entre 2 et $\sqrt{n}$. Si n n'est pas premier, alors il existe d et d' tel que $n = dd'$ avec $2 \leqslant d < n$ et $2 \leqslant d' < n$. Remarquons que si $d > \sqrt{n}$ et $d' > \sqrt{n}$, alors par produit $n > n$ ce qui est impossible donc $d \leqslant \sqrt{n}$ ou $d' \leqslant \sqrt{n}$. On a donc démontré que si n n'est pas premier il admet un diviseur entre 2 et $\sqrt{n}$. Par contraposée, on a donc montré que si un nombre n'admet pas de diviseur entre 2 et $\sqrt{n}$ alors il est premier.

```
def EstPremier(n):
    """Pour un entier naturel, renvoie True si n est premier et False sinon"""
    if n <= 2:
        return n == 2
    for d in range(2,int(n**(1/2)) + 1):
        if n%d == 0:#d divise n
            return False
    return True

L = [k for k in range(2,1001) if EstPremier(k)]#Liste des nombres premiers inférieurs ou égale à 1000
```

Lemme 2. Soit un entier $n \geqslant 2$, alors n est divisible par au moins un nombre premier.

Démonstration du lemme 2 : Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «n est divisible par au moins un nombre premier».

- Comme 2 est premier et que 2 divise 2, $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- Soit un entier $n \geqslant 2$. Supposons que, pour tout $k \in [\![2\,;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

— Si $n+1$ est premier, alors $n+1$ divise $n+1$, ainsi il existe un nombre premier divisant $n+1$.
— Si $n+1$ n'est pas premier, il existe $d \in \mathbb{N}$ divisant $n+1$ avec $2 \leqslant d < n+1$. En particulier, $2 \leqslant d \leqslant n$. Comme $\mathscr{P}(d)$ est vraie, il existe p un nombre premier tel que p divise d comme d divise $n+1$, on en déduit que p divise $n+1$.

Dans tous les cas, on a montré que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence forte, on a montré que tout entier $n \geqslant 2$ est divisible par au moins un nombre premier.

Théorème n° 6 : ensemble des nombres premiers

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration du théorème n° 6 : Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers, notons les $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Posons $N = \prod_{i=1}^{n} p_i + 1$, alors d'après le lemme 2, il existe un nombre premier divisant N. Ainsi, il existe $k \in [\![1\,;n]\!]$ tel que p_k divise N. De plus, p_k divise $\prod_{i=1}^{n} p_i$. Par différence, p_k divise $N - \prod_{i=1}^{n} p_i = 1$. Comme $p_k \geqslant 2$ c'est absurde. Ainsi, il existe un nombre infini de nombres premiers. ■

Théorème n° 7 : décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers *(admis)*

Soit un entier $n \geqslant 2$. Il existe un unique $r \in \mathbb{N}^*$, un unique r-uplet de nombre premiers $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ et un unique r-uplet d'entiers naturels non nuls $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ tels que $n = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\alpha_i}$.

Exemple 23. $24 = 2^3 \times 3$ $\qquad\qquad$ $245 =$

Remarque 10. Si un nombre premier p divise a mais pas b, on peut toujours rajouter p dans la décomposition de b avec un exposant nul. De même pour les nombres premiers divisant b mais pas a.

Proposition n° 11 : condition nécessaire et suffisante de divisibilité

Soit $a = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\alpha_i}$ et $d = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\delta_i}$ avec p_i des nombres premiers tels que $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ et α_i et δ_i des entiers naturels. Alors, d divise a ssi pour tout $i \in [\![1\,;s]\!]$, $\delta_i \leqslant \alpha_i$.

Démonstration de la proposition n° 11 : Supposons que pour tout $i \in [\![1\,;s]\!]$, $\delta_i \leqslant \alpha_i$, alors

$$a = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{s} \left({p_i}^{\delta_i} \times {p_i}^{\alpha_i - \delta_i} \right) = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\delta_i} \times \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\alpha_i - \delta_i} = d \times \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\alpha_i - \delta_i}$$

Comme $\alpha_i - \beta_i \in \mathbb{N}$, on en déduit que $a = dk$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, d divise a. Supposons que d divise a, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = dk$. Alors, on peut décomposer k comme un produit en facteur premiers, ainsi, $k = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\gamma_i} \times \prod_{i=s+1}^{r} {p_i}^{\gamma_i}$ où les nombres p_i pour $i > s$ sont d'éventuels nombres premiers qui apparaissent dans la décomposition de k sans apparaître dans celles de a et de d, alors par produit

$$\prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\alpha_i} = a = dk = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\beta_i + \gamma_i} \prod_{i=s+1}^{r} {p_i}^{\gamma_i}$$

mais par unicité de la décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers, on en déduit que, pour tout $i \in [\![1\,;s]\!]$, $\beta_i + \gamma_i = \alpha_i$ et donc que $\beta_i \leqslant \alpha_i$. ■

Proposition n° 12 : expression du PGCD/PPCM à l'aide de la décomposition

Si $a = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\beta_i}$ avec p_i des nombres premiers tels $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$, α_i et β_i des entiers naturels, alors $\mathrm{PGCD}(a,b) = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ et $\mathrm{PPCM}(a,b) = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$

Démonstration de la proposition n° 12 :

- Pour tout $i \in [\![1\,;s]\!]$, $\min(\alpha_i,\beta_i) \leqslant \alpha_i$, ainsi, d'après la proposition 11, $D = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$ divise a, il divise de même b. Soit d un diviseur quelconque de a et de b, alors nécessairement, d'après la proposition 11, la décomposition en facteurs premiers de d contient au plus les nombres premiers p_1, p_2, …, p_r, dès lors, $d = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\gamma_i}$ avec $\gamma_i \in \mathbb{N}$, et $\gamma_i \leqslant \alpha_i$. De même, comme d divise b, $\gamma_i \leqslant \beta_i$, par conséquent, $\gamma_i \leqslant \min(\alpha_i,\beta_i)$ et donc par produit d'inégalités, $d \leqslant D$. Ainsi, le plus grand diviseur commun de a et b est $D = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$.
- Comme pour tout $i \in [\![1\,;s]\!]$, $\alpha_i \leqslant \max(\alpha_i,\beta_i)$, d'après la proposition 11, a divise $M = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$, de même, b divise M, ainsi M est un multiple commun à a et b. Soit m un multiple commun de a et b, alors $m = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\gamma_i} \times \prod_{i=s+1}^{r} {p_i}^{\gamma_i}$ avec $\gamma_i \in \mathbb{N}$ et $p_{s+1},\ldots,p_r$ d'éventuels autres nombres premiers intervenant dans la décomposition de m, comme a divise m, pour tout $i \in [\![1\,;s]\!]$, $\alpha_i \leqslant \gamma_i$, de même $\beta_i \leqslant \gamma_i$, ainsi, $\max(\alpha_i,\beta_i) \leqslant \gamma_i$, donc $M \leqslant m$. Ainsi, $M = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$ est le plus petit multiple commun à a et à b. ■

Exemple 24. Calculer le PGCD et le PPCM de 84 et 48.

Proposition n° 13 : lien entre PGCD et PCCM
Soit deux entiers $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$, alors $\text{PGCD}(a,b)\text{PPCM}(a,b) = ab$

Démonstration de la proposition n° 13 : Tout d'abord $a = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\beta_i}$ avec $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ des nombres premiers. Remarquons que, pour tout $i \in [\![1\,;s]\!]$, $\max(\alpha_i,\beta_i) + \min(\alpha_i,\beta_i) = \alpha_i + \beta_i$ (en effet soit le maximum vaut α_i et dans ce cas le minimum vaut β_i, soit c'est l'inverse.). Ainsi, en utilisant la proposition 12 :

$$\text{PGCD}(a,b)\text{PPCM}(a,b) = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\min(\alpha_i,\beta_i)} \times \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\max(\alpha_i,\beta_i)} = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\min(\alpha_i,\beta_i)+\max(\alpha_i,\beta_i)} = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\alpha_i+\beta_i} = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\alpha_i} \times \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\beta_i} = ab$$ ■