Exercice 0

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2-x-20 = (x-5)(x+4)$, ainsi il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{5,-4\}$,
$$\frac{1}{x^2-x-20} = \frac{1}{(x-5)(x+4)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+4}$$
En multipliant par $x-5$ et en faisant tendre x vers 5, on trouve $\frac{1}{9} = A$. En multipliant par $x+4$ et en faisant tendre x vers -4, on trouve $\frac{1}{-9} = B$. Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{x^2-x-20} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{x-5} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{x+4}$ admet comme primitive $x \mapsto \frac{1}{9}\ln(|x-5|) - \frac{1}{9}\ln(|x+4|)$ sur $]-\infty\,;-4[$, sur $]-4\,;5[$ ou sur $]5\,;+\infty[$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$x^2+3x+3 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
Ainsi, $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(2\frac{x+\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+3x+3}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $$\int_2^3 \frac{1}{x^2+12x+36}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{1}{(x+6)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x+6}\right]_2^3 = \frac{-1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{1}{72}$$
4. On pose $u\colon x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $v\colon x \mapsto \ln(x)$, $(u,v) \in \mathscr{C}^1([\,1\,;\mathrm{e}\,],\mathbb{R})^2$, $u'\colon x \mapsto x$ et $v'\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. Par intégration par parties
$$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$$
5. On pose $u\colon x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et $v\colon x \mapsto \ln(x)$, $(u,v) \in \mathscr{C}^1([\,1\,;\mathrm{e}\,],\mathbb{R})^2$, $u'\colon x \mapsto x^2$ et $v'\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. Par intégration par parties
$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{\mathrm{e}^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2\mathrm{e}^3+1}{9}$$
6.
7.
8. On pose $t = \ln(x)$, alors $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, donc $\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, ainsi,
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x+3x\ln(x)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+3\mathrm{e}^t t} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+3t} = \left[\frac{1}{3}\ln(1+3t)\right]_0^1 = \frac{\ln(4)}{3}$$
9. Soit $x > 0$. On pose $u = \ln(t)$, alors $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ donc $\mathrm{d}t = t\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Ainsi,
$$\begin{aligned}
\int^x \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t &= \int^{\ln(x)} \cos(u)\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \int^{\ln(x)} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \int^{\ln(x)} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\mathrm{e}^u)\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{Re}\left(\int^{\ln(x)} \mathrm{e}^{u(\mathrm{i}+1)}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{u(\mathrm{i}+1)}}{\mathrm{i}+1}\right]^{\ln(x)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(x)}(1-\mathrm{i})}{2}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{x(\cos(\ln(x))+\mathrm{i}\sin(\ln(x)))(1-i)}{2}\right) = \frac{x\cos(\ln(x))+x\sin(\ln(x))}{2}
\end{aligned}$$
Ainsi, $x \mapsto \frac{x\cos(\ln(x))+x\sin(\ln(x))}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \cos(\ln(x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1

Voir le corrigé sur https://www.youtube.com/watch?v=4iO0BtD_vVw

Exercice 2

- Résolvons l'équation homogène associée à l'équation : $y''(t) - y'(t) - 12y(t) = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - r - 12 = 0$ dont 4 et -3 sont des racines évidentes. Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont exactement les fonctions $t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{4t} + C_2 \mathrm{e}^{-3t}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Cherchons une solution particulière de l'équation $y'(t) - 12y(t) = a\cos(t)$ sous la forme $y_P : t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t)$. Alors, $y_P' : x \mapsto -A\sin(t) + B\cos(t)$ et $y_P'' : x \mapsto -A\cos(t) - B\sin(t)$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y''(t) - y'(t) - 12y(t) = [-A - B - 12A]\cos(t) + [-B + A - 12B]\sin(t)$$

  Ainsi, pour que y_P soit une solution particulière, il suffit que A et B soient solution du système :

$$\begin{cases} -13A - B &= a \\ A - 13B &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -13^2 B - B &= a \\ A &= 13B \end{cases} \iff \begin{cases} B &= \dfrac{-a}{170} \\ A &= \dfrac{-13a}{170} \end{cases}$$

  Ainsi, $t \mapsto -\dfrac{13a}{170}\cos(t) - \dfrac{a}{170}\sin(t)$ est une solution particulière de l'équation $y'(t) - 12y(t) = a\cos(t)$
- Ainsi, les solutions de l'équation $y'(t) - 12y(t) = a\cos(t)$ sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{4t} + C_2 \mathrm{e}^{-3t} - \frac{13a}{170}\cos(t) - \frac{a}{170}\sin(t) \qquad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Soit $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$, posons $f : t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{4t} + C_2 \mathrm{e}^{-3t} - \dfrac{13a}{170}\cos(t) - \dfrac{a}{170}\sin(t)$, alors $f(0) = C_1 + C_2 - \dfrac{13a}{170}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 4C_1 \mathrm{e}^{4t} - 3C_2 \mathrm{e}^{-3t} + \dfrac{13a}{170}\sin(t) - \dfrac{a}{170}\cos(t)$. Dès lors, $f'(0) = 4C_1 - 3C_2 - \dfrac{a}{170}$. Ainsi, f est solution du problème de Cauchy ssi C_1 et C_2 sont solution du système :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 &= \dfrac{13a}{170} \\ 4C_1 - 3C_2 &= \dfrac{a}{170} \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}{\iff} \begin{cases} C_1 + C_2 &= \dfrac{13a}{170} \\ -7C_2 &= \dfrac{a(1 - 13 \times 4)}{170} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_2 &= \dfrac{1}{7} \times \dfrac{51a}{170} = \dfrac{3a}{70} \\ C_1 &= \dfrac{13a}{170} - C2 = \dfrac{13a}{170} - \dfrac{3a}{70} = \dfrac{7 \times 13a - 17 \times 3a}{170 \times 7} = \dfrac{40a}{7 \times 170} \end{cases}$$

  Ainsi, $t \mapsto a\left(\dfrac{4}{119}\mathrm{e}^{4t} + \dfrac{3}{70}\mathrm{e}^{-3t} - \dfrac{13}{170}\cos(t) - \dfrac{1}{170}\sin(t)\right)$ est la solution du problème de Cauchy.

Wallis in wonderland

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos^2(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}+2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2t}}{4} = \frac{2\cos(2t)+2}{4} = \frac{1+\cos(2t)}{2}\\
\cos^3(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3t}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3t}}{8}\\
&= \frac{2\cos(3t)+6\cos(t)}{8} = \frac{\cos(3t)+3\cos(t)}{4}\\
\cos^4(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^4 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}4t}+4\mathrm{e}^{\mathrm{i}3t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+6\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2t}+4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4t}}{16}\\
&= \frac{2\cos(4t)+6+8\cos(2t)}{16} = \frac{\cos(4t)+3+4\cos(2t)}{8}\\
\cos^5(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^5 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}5t}+5\mathrm{e}^{\mathrm{i}4t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+10\mathrm{e}^{\mathrm{i}3t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2t}+10\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3t}+5\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5t}}{32}\\
&= \frac{\cos(5t)+5\cos(3t)+10\cos(t)}{16}\\
\cos^6(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^6 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}6t}+6\mathrm{e}^{\mathrm{i}5t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+15\mathrm{e}^{\mathrm{i}4t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2t}+20+15\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4t}+5\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}6t}}{64}\\
&= \frac{\cos(6t)+6\cos(4t)+15\cos(2t)+10}{32}
\end{aligned}$$

2. - $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$
   - $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
   - $W_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$
   - $W_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3t)+3\cos(t)}{4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(3t)}{12}+\frac{3\sin(t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{12}+\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$
   - $W_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(4t)+3+4\cos(2t)}{8}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(4t)}{32}+\frac{3t}{8}+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$
3. Posons $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, alors $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(-\,\mathrm{d}x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, en multipliant par $\cos^n(t) \geqslant 0$, $\cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $W_{n+1} \leqslant W_n$. Ainsi, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Comme ce qui précède, pour tout $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \geqslant 0$, ainsi, $\cos^n(t) \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$. Ainsi, la suite $(W_n)_n$ est une suite décroissante et minorée (par 0) donc d'après le théorème de la convergence monotone, $(W_n)_n$ converge.
6. sin est une primitive de cos. La dérivée de $t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ est $t \mapsto (n+1)\sin(t)\cos^n(t)$
7. Posons $u : t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ et $v : t \mapsto \sin(t)$. Remarquons que $(u,v) \in \mathscr{C}^1([\,0\,;\pi/2\,],\mathbb{R})^2$. De plus, $u' : t \mapsto (n+1)\cos^n(t)\sin(t)$ et $v' : t \mapsto \cos(t)$. Ainsi par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{u(t)} \times \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{u(t)}\underbrace{\sin(t)}_{v(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{-(n+1)\cos^n(t)\sin(t)}_{u'(t)} \times \underbrace{\sin(t)}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)(1-\cos^2(t))\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t) - \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)(W_n - W_{n+2})
\end{aligned}$$

Donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, ainsi $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

8. Posons l'hypothèse de récurrence : $\mathscr{P}(p)$: «$W_{2p} > 0$ et $W_{2p+1} > 0$». Comme $W_0 > 0$ et $W_1 > 0$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie. Alors $W_{2(p+1)} = W_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2}W_{2p} > 0$ (par produit de nombres strictement positifs), et $W_{2(p+1)+1} = W_{2p+3} = \dfrac{2p+2}{2p+3}W_{2p+1} > 0$ (également par produit de nombre strictement positifs). On en déduit que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie. Ainsi, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} > 0$ et $W_{2p+1} > 0$. Comme un entier naturel est soit pair soit impair, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors d'après la question 7,

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = [(n+2)W_{n+2}]\,W_{n+1} = [(n+1)W_n]\,W_{n+1}$$

Ceci montre que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Pour $n = 0$, on obtient que la constante vaut $1W_1W_0 = \pi/2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \pi/2$.

10. (a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} k = p!$

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k) = 2^p \prod_{k=1}^{p} k = 2^p p!$

(c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{p}(2k+1) = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p}(2k+1)\prod_{k=1}^{p}(2k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k)} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}$

11. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors en utilisant la question 7, avec $n = 2p-2$, on obtient

$$W_{2p} = W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n = \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2}$$

En utilisant la question 7 avec $n = 2p-4$, on obtient $W_{2p-2} = W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n = \dfrac{2p-3}{2p-2}W_{2p-4}$. Ainsi,

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times W_{2p-4}$$

En continuant ainsi, de proche en proche, on obtient :

$$\begin{aligned}
W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-5}{2p-4} \times \ldots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times W_0 \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(2k+1)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k)}W_0 = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{p}(2k)}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k)\right)^2}W_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}W_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

12. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(p)$:«$W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$». Pour $p = 0$, $\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} = W_0 = W_{2\times 0}$ et Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vérifiée, alors, en utilisant la question 7, on obtient

$$\begin{aligned} W_{2(p+1)} &= W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2(p+1)2(p+1)2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. De plus, d'après la question 9, $(2p+1)W_{2p+1}W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}$. En divisant par W_{2p} et grâce à l'expression de W_{2p}, on obtient $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $(W_n)_n$ est décroissante, $W_{n+1} \leqslant W_n$, en divisant par W_n qui est strictement positif, on obtient $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$. De plus, encore une fois par décroissance de $(W_n)_n$ et en utilisant la question 7 :

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n}$$

On en déduit les inégalités demandés.

14. Comme $\dfrac{n+1}{n+2} \sim \dfrac{n}{n} = 1$, on en déduit que $\dfrac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, par théorème d'encadrement, $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ainsi, $W_{n+1} \sim W_n$.

Execice 4

1. $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.
2. $1 + z^2 = 0$ ssi $z^2 - \mathrm{i}^2 = 0$ ssi $(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i}) = 0$ ssi $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$. Ainsi, f est définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i};\mathrm{i}\}$.
3. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}(\{1/2\}) &\iff g(x) \in \{1/2\} \iff g(x) = 1/2 \iff \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \iff 4x = 1 + x^2 \\ &\iff x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x = \frac{4+\sqrt{12}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{4-\sqrt{12}}{2} \end{aligned}$$

Dès lors, $g^{-1}(\{1/2\}) = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}([-1\,;1]) &\iff g(x) \in [-1\,;1] \iff |g(x)| \leqslant 1 \iff \frac{2|x|}{|1+x^2|} \leqslant 1 \underset{1+x^2\geqslant 0}{\iff} 2|x| \leqslant 1 + x^2 \\ &\iff (1 - |x|)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1 - |x|)^2 \geqslant 0$, dès lors, $g^{-1}([-1\,;1]) = \mathbb{R}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}(\{-1,1\}) &\iff g(x) \in \{-1;1\} \iff |g(x)| = 1 \iff \frac{2|x|}{|1+x^2|} = 1 \underset{1+x^2\geqslant 0}{\iff} 2|x| = 1 + x^2 \\ &\iff (1 - |x|)^2 = 0 \iff x = \pm 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $g^{-1}(\{-1,1\}) = \{1;-1\}$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}(]-1\,;1[) &\iff g(x) \in]-1\,;1[\iff |g(x)| < 1 \iff \frac{2|x|}{|1+x^2|} < 1 \underset{1+x^2\geqslant 0}{\iff} 2|x| < 1 + x^2 \\ &\iff (1 - |x|)^2 > 0 \iff x \neq \pm 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $g^{-1}(]-1\,;1[) = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

(e) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$,

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\{4/3\}) &\iff f(z) = \frac{4}{3} \iff \frac{2z}{1+z^2} = \frac{4}{3} \iff 6z = 4 + 4z^2 \iff z^2 - \frac{3}{2}z + 1 = 0 \\ &\iff \left(z - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} = 0 \iff (z - \frac{3}{4})^2 - \left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(z - \frac{3}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(z - \frac{3}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = 0 \iff z \in \left\{\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}; \frac{3-\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}\right\} \end{aligned}$$

On remarque qu'aucun de ces deux nombres ne valent i ou $-\mathrm{i}$ (car leur partie réelle est non nulle). Ainsi, $f^{-1}(\{4/3\}) = \left\{\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}; \frac{3-\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}\right\}$.

5. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^{2n} \neq -1$, alors $\frac{2z^n}{1+z^{2n}} = 4/3$ ssi $z^n = \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$ ou $z^n = \frac{3-\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$. Remarquons, comme à la question précédente que si $z^n = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{4}$, alors $z^n \neq \pm\mathrm{i}$ de sorte que $z^{2n} \neq -1$. Considérons $Z = \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$, alors $|Z| = 1$. Remarquons que comme $\mathrm{Re}(Z) > 0$ il existe $\theta \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$, tel que $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, par identification, $\cos(\theta) = 3/4$ et $\sin(\theta) = \sqrt{7}/4$, par quotient $\tan(\theta) = \sqrt{7}/3$, ainsi $\arctan(\tan(\theta)) = \arctan(\sqrt{7}/3)$, comme, on a pris soin de prendre $\theta \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$, il en découle que $\theta = \arctan(\sqrt{7}/3)$. Dès lors,

$$Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(\frac{\sqrt{7}}{3})} \qquad \text{et} \qquad \frac{3-\mathrm{i}\sqrt{7}}{4} = \overline{Z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan(\sqrt{7}/3)}$$

On peut en conclure que $\frac{2z^n}{1+z^{2n}} = \frac{4}{3}$ ssi il existe $k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(\sqrt{7}/3)/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k/n}$ ou $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan(\sqrt{7}/3)/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k/n}$. L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$$\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(\sqrt{7}/3)/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k/n} \mid k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]\right\} \bigcup \left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan(\sqrt{7}/3)/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k/n} \mid k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]\right\}$$

6. Soit $y \in g(\mathbb{R})$, ainsi il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$, comme on l'a montré précédemment, $g(x) \in [\,-1\,;1\,]$, ainsi $y \in [\,-1\,;1\,]$. Ceci montre que $g(\mathbb{R}) \subset [\,-1\,;1\,]$.
Fixons $y \in [\,-1\,;1\,]$. Cherchons à résoudre l'équation $y = g(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$y = g(x) \iff y = \frac{2x}{1+x^2} \iff yx^2 - 2x + y = 0$$

Observons que si $y = 0$, cette équation admet une solution : 0. Si $y \neq 0$, alors on obtient une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4y^2$. Or, $y \in [\,-1\,;1\,]$, donc $0 \leqslant y^2 \leqslant 1$. Ceci prouve que $\Delta \geqslant 0$ et que donc cette équation admet au moins une solution réelle. Ainsi, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$. Dès lors, que y soit nul ou non, on a montré que $y \in g(\mathbb{R})$. Par conséquent, $[\,-1\,;1\,] \subset g(\mathbb{R})$. Par double inclusion, on a montré que $g(\mathbb{R}) = [\,-1\,;1\,]$.

7. Soit $y \in [\,-1\,;1\,]$, on cherche à résoudre l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$ dans $[\,-1\,;1\,]$:
   - Si $y = 0$, alors $yx^2 - 2x + y = -2x$ ne s'annule que pour $x = 0 \in [\,-1\,;1\,]$
   - Si $y = 1$, alors $yx^2 - 2x + y = (x-1)^2$ ne s'annule que pour $x = 1 \in [\,-1\,;1\,]$.
   - Si $y = -1$, alors $yx^2 - 2x + y = -(x+1)^2$ a une et une seule solution : $x = -1 \in [\,-1\,;1\,]$.
   - Si $y \in \left]-1\,;1\right[\backslash\{0\}$, alors le discriminant de l'équation du second degré vérifie $\Delta = 4(1-y^2) > 0$ (car $y^2 < 1$). Ainsi, cette équation possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2 + \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} |x_2| &= \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{|y|} \geqslant \frac{1}{|y|} > 1 \\ |x_1| &= \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{|y|} \leqslant \frac{1-(1-y^2)}{|y|} = \frac{|y|^2}{|y|} = |y| \leqslant 1 \end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que $\sqrt{t} \geqslant t$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$ Ceci prouve que x existe et est unique dans $[\,-1\,;1\,]$ et que $x = x_1$, ainsi $g_{|[\,-1\,;1\,]}\colon [\,-1\,;1\,] \to [\,-1\,;1\,]$ est bijective de bijection réciproque

$$y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ 1 & \text{si } y = 1 \\ -1 & \text{si } y = -1 \\ \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que la valeur pour $y = 1$ et $y = -1$ rentre dans la quatrième expression, ainsi la bijection réciproque est

$$\begin{cases} [\,-1\,;1\,] \longrightarrow [\,-1\,;1\,] \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

8. Démontrer que $g_{|]\,-\infty\,;-1\,]}\colon]\,-\infty\,;-1\,] \to [\,-1\,;0\,[$ est une bijection et trouver sa bijection réciproque.

9. Comme $g(2+\sqrt{3}) = g(2-\sqrt{3}) = \dfrac{1}{2}$ avec $2+\sqrt{3} \neq 2-\sqrt{3}$, on en déduit que g n'est pas injective. Par conséquent, g n'est pas bijective.

   Remarque 1. Ainsi,le fait que $g_{|[\,-1\,;1\,]}\colon [\,-1\,;1\,] \to [\,-1\,;1\,]$, $g_{|]\,-\infty\,;-1\,]}\colon]\,-\infty\,;-1\,[\to [\,-1\,;0\,[$ et $g_{|[\,1\,;+\infty\,[}\colon]\,-\infty\,;1\,] \to]\,0\,;1\,]$ soient bijectives (de même) n'entraîne pas que g soit bijective. La bijectivité ne se recolle pas par morceaux.

On pose $h\colon x \mapsto \arccos\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) + 2\arctan(x)$

10. On a démontré lors de la question 4b, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \in [\,-1\,;1\,]$, comme arccos est définie sur $[\,-1\,;1\,]$, par composition, $x \mapsto \arccos(2x/(1+x^2))$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout comme arctan, par somme, h est définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $D = \mathbb{R}$.

11. - $h(0) = \arccos(0) + 2\arctan(0) = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$
    - $h(1) = \arccos(1) + 2\arctan(1) = 0 + 2\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$
    - $h(-1) = \arccos(-1) + 2\arctan(-1) = \pi - 2\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$
    - $h(\sqrt{3}) = \arccos(\sqrt{3}/2) + 2\arctan(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{6} + 2\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6}$
    - $h(-\sqrt{3}) = \arccos(-\sqrt{3}/2) + 2\arctan(-\sqrt{3}) = \dfrac{5\pi}{6} - 2\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$

12. Posons $D' = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. Or, d'après la question4d, $g\colon D' \to]\,-1\,;1\,[$, en outre, arccos est dérivable sur $]\,-1\,;1\,[$, par composée, $x \mapsto \arccos(g(x))$ est dérivable sur D', comme arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur D), par somme h est dérivable sur D'. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2x^2-2}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} + \frac{2}{1+x^2} \\ &= \frac{2x^2-2}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}\left(\frac{x^2-1}{|x^2-1|}+1\right) \end{aligned}$$

13. Pour tout $x \in]\,-1\,;1\,[$, $x^2-1 \leqslant 0$, ainsi $|x^2-1| = 1-x^2$, dès lors, $h(x) = 0$. Ceci prouve que h est constante sur l'intervalle $]\,-1\,;1\,[$. Ainsi, pour tout $x \in]\,-1\,;1\,[$, $h(x) = h(0) = \pi/2$. De plus, $h(1) = h(-1) = \pi/2$. Ceci montre que h est constante sur $[\,-1\,;1\,]$ et que la constante vaut $\pi/2$.

14. Pour $t \in \mathbb{R}\backslash[\,-1\,;1\,]$, $h'(t) = \dfrac{4}{1+t^2}$. Ainsi, pour tout $x > 1$, en intégrant la relation précédente entre x et $\sqrt{3}$, on obtient :

$$h(x) - h(\sqrt{3}) = \int_{\sqrt{3}}^{x} h'(t)\,\mathrm{d}t = 4\int_{\sqrt{3}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 4\arctan(x) - 4\arctan(\sqrt{3})$$

Dès lors, pour $x > 1$, $h(x) = \dfrac{5\pi}{6} - 4\dfrac{\pi}{3} + 4\arctan(x) = 4\arctan(x) - \dfrac{\pi}{2}$. On remarque, que pour $x = 1$, $4\arctan(x) - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} = h(1)$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 1$, $h(x) = 4\arctan(x) - \dfrac{\pi}{2}$.

De même, pour tout $x < -1$, en intégrant la relation précédente entre x et $-\sqrt{3}$, on obtient :

$$h(x) - h(-\sqrt{3}) = \int_{-\sqrt{3}}^{x} h'(t)\,\mathrm{d}t = 4\int_{-\sqrt{3}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 4\arctan(x) - 4\arctan(-\sqrt{3})$$

Dès lors, pour $x < -1$, $h(x) = \dfrac{\pi}{6} + 4\dfrac{\pi}{3} + 4\arctan(x) = 4\arctan(x) + \dfrac{3\pi}{2}$. On remarque que pour $x = -1$, $4\arctan(x) + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x \leqslant -1$, $h(x) = \dfrac{3\pi}{2} + 4\arctan(x)$.

15. Soit $x \in]-1\,;1[$, alors $\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$. En revanche, si $x > 1$, alors

$$\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \frac{4\arctan(x) - 4\arctan(1)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^+]{} 4\arctan'(1) = 2$$

Ainsi, le taux d'accroissement de h en 1 et x n'a pas de limite quand x tend vers 1 (limite à droite et à gauche différentes). Dès lors, h n'est pas dérivable en 1.

De même, soit $x \in]-1\,;1[$, alors $\dfrac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)} \xrightarrow[x\to -1^+]{} 0$. En revanche, si $x < -1$, alors

$$\frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)} = \frac{4\arctan(x) - 4\arctan(-1)}{x-(-1)} \xrightarrow[x\to -1^-]{} 4\arctan'(-1) = 2$$

Ainsi, le taux d'accroissement de h en -1 et x n'a pas de limite quand x tend vers -1 (limite à droite et à gauche différentes). Dès lors, h n'est pas dérivable en -1.

16. Comme $\arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$ et $\arctan(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{3\pi}{2}$ et que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\dfrac{\pi}{2}$

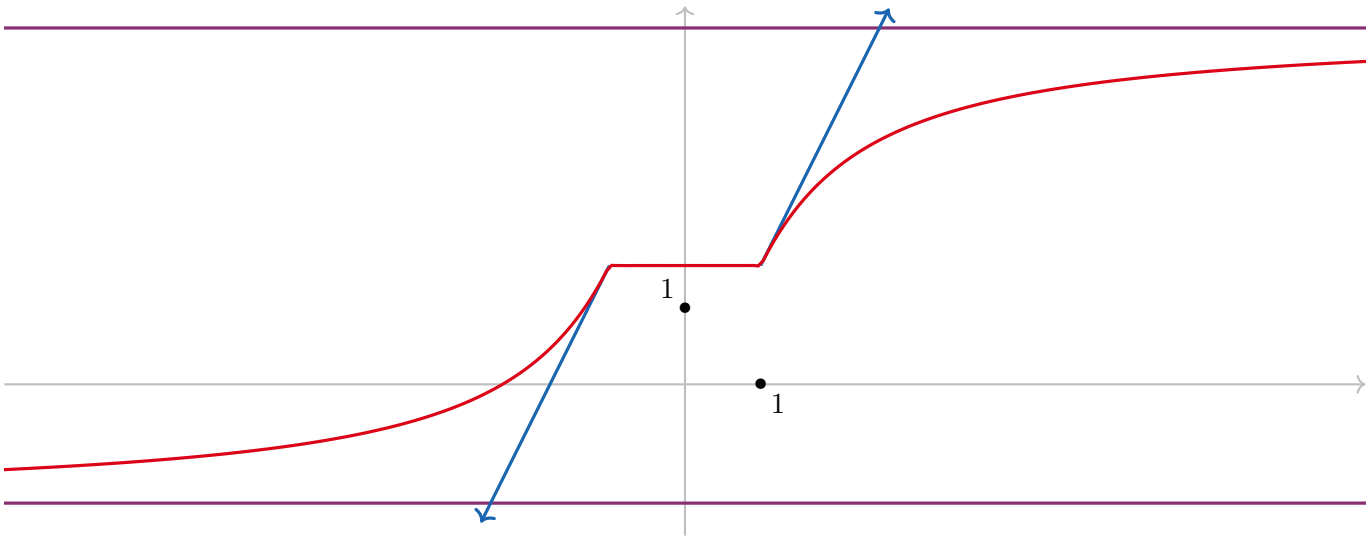


FIGURE 1 – En rouge la courbe de h, en violet les asymptotes verticales et en bleu les demi-tangentes de h en 1 et en -1.

17.

1 Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u = f$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{n}\sin(nx)$, alors $(u, v) \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{R})^2$, $u' = f'$ et $v' : x \mapsto \cos(nx)$, ainsi, par intégrations par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \left[f(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{f(b)\sin(nb)}{n} - \frac{f(a)\sin(na)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Traitons les trois termes séparément :

- $\dfrac{|f(b)\sin(nb)|}{n} \leqslant \dfrac{|f(b)|}{n}$, donc $-\dfrac{|f(b)|}{n} \leqslant \dfrac{f(b)\sin(nb)}{n} \leqslant \dfrac{|f(b)|}{n}$, ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\dfrac{f(b)\sin(nb)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- De même, $\dfrac{f(a)\sin(na)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $|f'(x)\sin(nx)| \leqslant |f'(x)|$, soit $-|f'(x)| \leqslant f'(x)\sin(nx) \leqslant |f'(x)|$, par croissance de l'intégrale,
$$\int_a^b -|f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$
En divisant par $n \neq 0$,
$$\frac{1}{n}\int_a^b -|f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$
D'après le théorème d'encadrement, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Par somme de trois termes qui tendent vers 0,

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$