DM3

À rendre le vendredi 20 Novembre 2026

Les questions 3 et 4 de l'exercice 1 sont moins prioritaires, il est donc conseillé de ne pas s'y attarder à moins que vous soyez dans le premier tiers de la classe.

Exercice 1 : des sommes plus ou moins complexes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j - i)$.
2. Rappeler l'expression des racines cubiques de l'unité sous forme algébrique, on note j celle dont la partie imaginaire est strictement positive, calculer $1 + j$ et $1 + j^2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$A_n = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{3}\right)} \binom{n}{3k} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{3}\right)} \binom{n}{3k+1} \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-2}{3}\right)} \binom{n}{3k+2}$$

   Calculer $(1+1)^n$, $(1+j)^n$, $(1+j^2)^n$ en fonction de A_n, B_n et C_n.
4. En déduire la valeur de A_n, B_n et C_n.

Exercice 2 : il faut combattre le système

Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose

$$f_m : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (3x + (m+3)y + 4z, 4x + 6y + z(7-m), x + y + z) \end{cases}$$

1. Dans cette question uniquement, on considère $m = 0$. Déterminer l'image directe de A par f_m où $A = \{(x,y,0) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Donner l'interprétation géométrique de $f(A)$.
2. Dans cette question uniquement, on considère $m = -1$ et $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$. Déterminer l'image réciproque de B par f_m et donner l'interprétation géométrique de $f^{-1}(B)$.
3. Dans cette question uniquement, on considère $m = 2$. Calculer $f_m(1,0,2)$ et $f_m(2,1,0)$. Que peut-on en conclure sur f_m ?
4. Dans cette question uniquement, on considère $m = 1$. Démontrer que $(2,7,8)$ n'est pas dans l'image de f_m. Que peut-on en conclure sur f_m ?
5. On considère maintenant m quelconque et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système d'inconnues x, y et z suivant :

$$\begin{cases} 3x + (m+3)y + 4z &= a \\ 4x + 6y + z(7-m) &= b \\ x + y + z &= c \end{cases}$$

6. En déduire les $m \in \mathbb{R}$ tel que f_m est bijective et déterminer alors l'expression de la bijection réciproque de f_m.