Exercice 0 : Ne vous trompez pas de cible !

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 4x & +2y & +6z & = 8 \\ 5x & +4y & +9z & = 13 \\ x & +2y & +3z & = 5 \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x & +2y & +3z & = 5 \\ 5x & +4y & +9z & = 13 \\ 4x & +2y & +6z & = 8 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\iff} \begin{cases} x & +2y & +3z & = 5 \\ & -6y & -6z & = -12 \\ & -6y & -6z & = -12 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\iff} \begin{cases} x & +2y & +3z & = 5 \\ & y & +z & = 2 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} x & & +z & = 1 \\ & y & +z & = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = 1 - z \\ y & = 2 - z \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est

$$\{(1-z; 2-z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 1 : Nager dans la baie de la Somme !

1. La suite $(3n-8)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 3, ainsi
$$\sum_{k=n+1}^{2n} (3k-8) = \frac{(3\cdot(n+1)-8)+(3\cdot(2n)-8)}{2} n = \frac{(9n-13)n}{2}$$
2. $\sum_{k=2}^{n} u_k = u_2 \times \frac{1-2^{n-2+1}}{1-2} = u_4 \times 2^{2-4} \times (2^{n-1}-1) = 2(2^{n-1}-1) = 2^n - 2$
3. Comme c'est une somme télescopique,
$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
4. Soit $(a,b,n) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
5. On effectue le changement d'indice $j = k-1$:
$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k-1} 3^{k+1} = \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} 3^{j+2} = 9 \left(\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} 3^j \right)$$
$$= 9 \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 3^j 1^{n-j} - \underbrace{\binom{n}{0} 3^0 1^{n-0}}_{\text{terme pour } j=0} - \underbrace{\binom{n}{n} 3^n 1^{n-n}}_{\text{terme pour } j=n} \right) = 9(4^n - 1 - 3^n)$$
6. Ici, on a un choix, sommer sur i d'abord puis par j ou l'inverse, les deux fonctionnent en reconnaissant des sommes de suites géométriques (de raison $\frac{1}{2}$ puis de raison 2 ou l'inverse)
   - Si on prend j comme indice de la première somme :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{j-i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} 2^j \left(\frac{1}{2}\right)^i \right) = \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^j}{1-\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{2^{j-1}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (2^j - 1) = \sum_{j=1}^{n} 2^j - \sum_{j=1}^{n} 1 = 2\frac{1-2^n}{1-2} - n = 2^{n+1} - 2 - n$$

- Si on prend i comme indice de la première somme :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{j-i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} 2^j\left(\frac{1}{2}\right)^i\right) = \sum_{i=1}^{n} 1 \times \frac{1-2^{n-i+1}}{1-2} = \sum_{i=1}^{n}(2^{n+1-i}-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2^n \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - n = 2^{n+1} - 2 - n$$

Exercice 2 : Comme Dune, l'intégrale est en six volumes

1. En proposant deux méthodes :
   - En reconnaissant la forme $u'u^2$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x)\sin(x)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$.
   - En posant [1] $t = \sin(x)$, alors $\mathrm{d}t = \cos(x)\,\mathrm{d}x$, ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x)\sin(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} u^2\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

2. On pose $u\colon x \mapsto x$ et $v\colon x \mapsto -\cos(x)$, de sorte que u et v soient des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi/6\,]$, alors $u'\colon x \mapsto 1$ et $v'\colon x \mapsto \sin(x)$. Par intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{\sin(x)}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x = [\underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{(-\cos(x))}_{v(x)}]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{(-\cos(x))}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}\pi}{12} + \frac{1}{2}$$

3.

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b}}{2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a+b)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-b)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(b-a)}}{4}$$

$$= \frac{2\cos(a+b)+2\cos(a-b)}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$

4. Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$
   - Si $m \neq n$ et $m \neq -n$, en utilisant la question précédente :

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(mt+nt)+\cos(mt-nt)\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{\sin((m+n)t)}{m+n} + \frac{1}{2}\frac{\sin((m-n)t)}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0$$

   - Si $m = n \neq 0$, alors

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(mt+nt)+\cos(mt-nt)\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(2mt)+1\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2mt)}{2m}+t\right)\right]_0^{2\pi} = \pi$$

1. Si on ne sait pas s'il faut poser $t = \sin(x)$ ou $t = \cos(x)$, on tente les deux au brouillon, le premier qui marche, on le fait.

- Si $m \in \mathbb{Z}^*$ et $m = -n$, alors en utilisant la parité du cosinus, on utilise le cas précédent : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(-mt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t = \pi$
- Si $m = n = 0$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$.

5. On pose $u = \mathrm{e}^t$, alors $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, ainsi,

$$\int^x \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2t} + 11\mathrm{e}^t + 18} = \int^{\mathrm{e}^x} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 11u + 18} = \int^{\mathrm{e}^x} \frac{\mathrm{d}u}{(u+9)(u+2)}$$

Or, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-9\} \qquad \frac{1}{(u+9)(u+2)} = \frac{A}{u+9} + \frac{B}{u+2}$$

On multiplie par $u+9$ et on fait tendre u vers -9, il vient $A = -\dfrac{1}{7}$. On multiplie par $u+2$ et on fait tendre u vers -2, il vient $B = \dfrac{1}{7}$, ainsi,

$$\begin{aligned}\int^x \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2t} + 11\mathrm{e}^t + 18} &= \int^{\mathrm{e}^x} -\frac{1}{7}\times\frac{1}{u+9} + \frac{1}{7}\times\frac{1}{u+2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[-\frac{1}{7}\ln(|u+9|) + \frac{1}{7}\ln(|u+2|)\right]^{\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{1}{7}\ln\left(\frac{2+\mathrm{e}^x}{9+\mathrm{e}^x}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto \dfrac{1}{7}\ln\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^x}{9+\mathrm{e}^x}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 11\mathrm{e}^x + 18}$ sur $\mathbb{R}$.

6. Proposons deux méthodes :
   - $x \mapsto \dfrac{1}{2}\times 2x \times \dfrac{1}{1+(x^2)^2}$ se primitive en $x \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan(x^2)$.
   - On cherche à calculer $\displaystyle\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$, cela ressemble à de la dérivée d'arctan, on pose alors $u = t^2$, alors $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$, donc $t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$, ainsi, par changement de variable

$$\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int^{x^2} \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{1+u^2} = \left[\frac{1}{2}\arctan(u)\right]^{x^2} = \frac{1}{2}\arctan(x^2)$$

Donc $x \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan(x^2)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$.

Exercice 3 : La somme prend la tangente (vers π) !

1. On peut définir D l'ensemble de définition de tan de deux façons :

$$D = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$$

Elle est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

2. - $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$

- $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \left[-\ln(|\cos(t)|)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ln(1) = \frac{\ln(2)}{2}$
- $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t) + 1 - 1\,\mathrm{d}t = \left[\tan(t) - t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout [2] $t \in [\,0\,;\pi/4\,]$, $\tan(t) \geqslant 0$, d'où $\tan^n(t) \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^{n+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n\,(1-\tan(t))\,\mathrm{d}t$$

Soit $t \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{4}\,\right]$, alors par croissance de la fonction tan sur $\left[\,0\,;\frac{\pi}{4}\,\right]$,

$$0 = \tan(0) \leqslant \tan(t) \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Ainsi, $1 - \tan(t) \geqslant 0$ et par produit, $\tan(t)^n(1-\tan(t)) \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que $I_n - I_{n+1} \geqslant 0$. Dès lors, $(I_n)_n$ est une suite décroissante.

5. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et est minorée (par 0), d'après le théorème de la limite monotone, $(I_n)_n$ converge.
6. Soit un entier $n \geqslant 2$. Par linéarité de l'intégrale, calculons $I_n + I_{n-2}$:

$$I_n + I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2}(t)\left[1+\tan^2(t)\right]\,\mathrm{d}t$$

On pose alors $u = \tan(t)$, $\mathrm{d}u = 1 + \tan^2(t)\,\mathrm{d}t$, ainsi, par changement de variable :

$$I_n + I_{n-2} = \int_0^1 u^{n-2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n-1}}{n-1}\right]_0^1 = \frac{1}{n-1}$$

7. Proposons deux méthodes :
   - Notons ℓ la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors par décalage d'indice, $I_{n-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, donc $I_n + I_{n-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\ell$. Or, $\frac{1}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par unicité de la limite, $2\ell = 0$ donc $\ell = 0$. Ainsi, $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   - Soit un entier $n \geqslant 2$, alors $I_{n-2} \geqslant 0$ et $I_n \geqslant 0$, donc

$$0 \leqslant I_n \leqslant I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

   Or, $\frac{1}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par théorème d'encadrement, $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
8. En utilisant la formule démontrée à la question 6 successivement pour $n \in [\![\,3\,;6\,]\!]$, il en découle que
   - $I_3 + I_1 = \frac{1}{2}$, donc $I_3 = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$
   - $I_4 + I_2 = \frac{1}{3}$, donc $I_4 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{3\pi - 8}{12}$
   - $I_5 + I_3 = \frac{1}{4}$, donc $I_5 = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)-1}{2} = \frac{2\ln(2)-1}{4}$
   - $I_6 + I_4 = \frac{1}{5}$, donc $I_6 = \frac{1}{5} + \frac{8-3\pi}{12} = \frac{52-15\pi}{60}$
9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathscr{P}(p)$:« $I_{2p} = (-1)^p\left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$ et $I_{2p+1} = (-1)^p\left(\frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k}{2k}\right)$ ».

Pour $p = 1$:

$$\begin{aligned}(-1)^p\left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right) &= -\left(\frac{\pi}{4} - (-1)\right) = 1 - \frac{\pi}{4} = I_2\\ (-1)^p\left(\frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k}{2k}\right) &= -\left(\frac{\ln 2}{2} + (-\frac{1}{2})\right) = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = I_3\end{aligned}$$

2. En effet, pour tout $t \in [\,0\,;\pi/4\,]$, $\sin(t) \geqslant 0$ et $\cos(t) > 0$ donc par quotient, $\tan(t) \geqslant 0$.

Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie, alors en utilisant la relation de la question 6 :

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} = I_{2p+2} &= \frac{1}{2p+1} - I_{2p} = \frac{1}{2p+1} - (-1)^p \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) \\
&= -(-1)^p \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{(-1)^p}{2p+1}\right) \\
&= (-1)^{p+1} \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) \\
I_{2(p+1)+3} = I_{2p+3} &= -I_{2p+1} + \frac{1}{2p+2} = -(-1)^p \left(\frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{2k}\right) + \frac{1}{2p+2} \\
&= -(-1)^p \left(\frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^{p+1}}{2(p+1)}\right) \\
&= (-1)^{p+1} \left(\frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^k}{2k}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie.

10.
```python
def Somme(p):
    S = 0
    for k in range(0,p): #k va prendre toutes les valeurs de 0 à p-1 (p est exclus)
        S = S + (-1)**k/(2*k+1)
    return 4*S
```

Exercice 4 : Allons ensembles de la partie, le jour de gloire...

1. Soient E et F deux ensembles. $\quad F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subset E.$
2. (a) Si $A = \{2\}$ et $B = \{3\}$, alors $A + B = \{5\}$
   (b) Si $A = \{2, 3\}$ et $B = \{-1, 3\}$, alors $A + B = \{1, 2, 5, 6\}$.
   (c) Si A quelconque et $B = \varnothing$, montrons alors que $A + B = \varnothing$. Supposons que $A + B$ soit non vide. Il existe donc $x \in A + B$. Ce qui veut dire qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$, alors comme $b \in B$, B est non vide ce qui est absurde[3] Ainsi, $A + B = \varnothing$
   (d) Si $A \neq \varnothing$ et $B = \mathbb{R}$, montrons que $A + B = \mathbb{R}$. D'une part, $A + B \subset \mathbb{R}$. D'autre part, soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $A \neq \varnothing$, il existe $a \in A$. Prenons alors $b = x - a \in \mathbb{R} = B$, ainsi,
   $$a + b = a + (x - a) = x$$
   avec $a \in A$ et $b \in B$ donc $x \in A+B$. On a ainsi montré que $\mathbb{R} \subset A+B$. Par double inclusion $A+B = \mathbb{R}$.
   (e) Si $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$, montrons que $A+B = \mathbb{R}$. D'une part, $A+B \subset \mathbb{R}$. D'autre part, soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geqslant 0$, posons $a = x \in A$ et $b = 0 \in B$, de sorte que $a + b = x$ donc $x \in A + B$. Si $x \leqslant 0$, posons $a = 0 \in A$ et $b = x \in B$, de sorte que $a + b = x$ donc $x \in A + B$. on a ainsi montré que $\mathbb{R} \subset A + B$. Par double inclusion, $A + B = \mathbb{R}$.
3. Supposons $A \subset A'$ et $B \subset B'$. Soit $x \in A + B$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Or, $a \in A \subset A'$ et $b \in B \subset B'$ donc $a \in A'$, $b \in B'$ et $x = a + b \in A' + B'$. On a donc montré que $A + B \subset A' + B'$.
4. Posons $N = \{0\}$, alors pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$,
   $$A + N = \{a + n \mid a \in A \text{ et } n \in N = \{0\}\} = \{a + 0 \mid a \in A\} == \{a \mid a \in A\} = A$$

3. En fait, on aurait pu rédiger par contraposé, ce qui aurait été plus élégant en montant que «$A + B \neq \varnothing \Longrightarrow B \neq \varnothing$».

Ainsi, on a existence de $N \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $A+N = A$. Soit N' une partie vérifiant pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $A + N' = A$. Alors, en appliquant la propriété à $A = N$, on a $N + N' = N$. De plus, par commutativité de la somme dans les réels,

$$N + N' = \{n + n' \mid n \in N \text{ et } n' \in N\} = \{n' + n \mid n' \in N' \text{ et } n \in N\} = N' + N$$

Or, en appliquant la propriété à $A = N'$ on a $N' + N = N'$. Dès lors,

$$N = N + N' = N' + N = N'$$

Donc il y a unicité de N.

5. Considérons $A = \{2, 3\}$ et supposons qu'il existe $B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que $A + B = N = \{0\}$. Si $B = \varnothing$, alors, d'après la question 2c, $A + B = \varnothing$ ce qui n'est pas le cas. Ainsi, B n'est pas l'ensemble vide. Ainsi, il existe $b \in B$. Donc $2 + b \in A + B = \{0\}$ et $3 + b \in A + B = \{0\}$. Donc $b = -2$ et $b = -3$. On en déduit que $-2 = -3$ ce qui est absurde. Ainsi, il existe $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, et pour tout $B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $A + B \neq N$.

6. - Soit $x \in (A \cup A') + B$ ainsi il existe $a \in A \cup A'$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Il y a deux cas $a \in A$ ou $a \in A'$. Si $a \in A$, alors $x = a + b \in A + B$, ainsi $x \in (A + B) \cup (A' + B)$. Si $a \in A'$, alors $x = a + b \in A' + B$, ainsi $x \in (A + B) \cup (A' + B)$ dans tous les cas, on a montré que $x \in (A + B) \cup (A' + B)$ Ainsi, on a montré que $(A \cup A') + B \subset (A + B) \cup (A' + B)$.
   - Soit $x \in (A + B) \cup (A' + B)$, alors il y a deux cas, $x \in A + B$ ou $x \in A' + B$. Si $x \in A + B$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$, alors $a \in A \cup A'$ et $b \in B$, donc $x \in (A \cup A') + B$. Si $x \in A' + B$, alors il existe $a \in A'$ et $b \in B$, alors $a \in A \cup A'$ et $b \in B$, donc $x \in (A \cup A') + B$. Dans tous les cas on a montré que $x \in (A \cup A') + B$. Ainsi, $(A + B) \cup (A' + B) \subset (A \cup A') + B$.

   Par double inclusion, $(A \cup A') + B = (A + B) \cup (A' + B)$.

7. - Soit $x \in A + B$. Par définition de $A + B$, il existe ainsi, $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Or, $(a, b) \in A \times B$ et $f((a, b)) = a + b = x$. Ainsi, x admet au moins un antécédent par la fonction f. Ainsi, la fonction f est donc nécessairement surjective.
   - Prenons $A = B = \mathbb{R}$, alors $(1, 1) \in A \times B$ et $(2, 0) \in A \times B$, $f((1, 1)) = 2 = f((2, 0))$, ainsi, f n'est pas injective. Donc, f n'est pas nécessairement injective [4].

8. Supposons que $0 \in B$. Soit $a \in A$, alors $a = a + 0$ avec $a \in A$ et $0 \in B$, ainsi, $a \in A + B$, on a donc montré que $A \subset A + B$.

9. Posons $A = \mathbb{R}_+^*$ et $B = \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $A \subset A + B$. Soit $x \in A = \mathbb{R}_+^*$, posons alors $a = \dfrac{x}{2} \in \mathbb{R}_+^* = A$ et $b = \dfrac{x}{2} \in \mathbb{R}_+^* = B$ de sorte que $x = a + b \in A + B$. Il en découle que $A \subset A + B$. Cependant $0 \notin B$. ainsi la proposition «$A \subset A + B \implies 0 \in B$» est fausse.

10. Montrons un résultat utile pour la suite : soit x et y deux réels. Définissons l'ensemble

$$E = \{tx + (1 - t)y \mid t \in [\,0\,;1\,]\}$$

Alors E est égal au segment $[\,x\,;y\,]$ si $x \leqslant y$ et au segment [5] $[\,y\,;x\,]$ si $y \leqslant x$. Supposons $x \leqslant y$. Soit $z \in E$ alors il existe $t \in [\,0\,;1\,]$ tel que $z = tx + (1 - t)y$, alors

$$\begin{aligned} z - x &= (t - 1)x + (1 - t)y = (1 - t)(y - x) \geqslant 0 \\ y - z &= -tx + ty = t(y - x) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $x \leqslant z$ et $z \leqslant y$, ce qui montre que $z \in [\,x\,;y\,]$. Donc $E \subset [\,x\,;y\,]$. Réciproquement, supposons que $z \in [\,x\,;y\,]$. si $x = y$, alors $z = x = y$ et donc posons $t = 0$ de sorte que $z = tx + (1 - t)y \in E$. si $x < y$, alors on pose $t = \dfrac{y - z}{y - x} \in [\,0\,;1\,]$, il en découle que

$$tx + (1 - t)y = \frac{y - z}{y - x}x + \frac{z - x}{y - x}y = z$$

4. Noter que f pouvait aussi être injective pour certains A et B. Par exemple dans le cas $A = \{2\}$, $B = \{3\}$. En effet, soit $(a, b) \in A \times B$ et $(a', b') \in A \times B$ tel que $f((a, b)) = f((a', b'))$, alors $a \in A$ et $a' \in A$, $b \in B$, $b' \in B$, ains, $a = a' = 2$ et $b = b' = 3$ donc $(a, b) = (a', b')$ et f est injective.

5. De façon à toujours mettre la borne supérieure du segment à droite et la plus petite à gauche.

donc $z \in E$, il en découle que $[\,x\,;y\,] \subset E$. On a ainsi montré que $[\,x\,;y\,] = E$. On montrerait de même que $[\,y\,;x\,] = E$ si jamais $y \leqslant x$.
Supposons que A et B sont des intervalles de $\mathbb{R}$. si $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$ alors $A + B = \varnothing$ (d'après la question 2c). Supposons $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. Montrons que $A + B$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(x, x') \in (A + B)^2$. Supposons $x \leqslant x'$. Soit $z \in [\,x\,;x'\,]$. Il existe alors $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$, il existe aussi $(a', b') \in A \times B$ tel que $x' = a' + b'$. D'après le résultat que l'on a montré il existe $t \in [\,0\,;1\,]$ tel que $z = tx + (1-t)x'$. Ainsi,

$$z = t(a+b) + (1-t)(a'+b') = ta + (1-t)a' + tb + (1-t)b'$$

Ainsi, $ta + (1-t)a' \in [\,a\,;a'\,]$ (ou $[\,a'\,;a\,]$), dans tous les cas, comme A est un intervalle et que a et a' sont dans A, on en déduit que $ta + (1-t)a' \in A$. De même, $tb + (1-t)b' \in B$, ceci montre que $z \in A + B$. On a donc montré que $[\,x\,;x'\,] \subset A + B$. D'après la caractérisation des intervalles, ceci montre que $A + B$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Une équation différentielle absolument difficile

1. L'équation homogène associée à (P) est $y' - y = 0$, les solutions de cette équation homogène sont exactement les fonctions $x \mapsto Ce^{x}$ où $C \in \mathbb{R}$. Appliquons la variation de la constante. On cherche y_P de la forme $y_P : x \mapsto C(x)e^{x}$ où C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y_P'(x) - y_P(x) = C'(x)e^{x} + C(x)e^{x} - C(x)e^{x} = C'(x)e^{x} = 2e^{-x} \quad \iff \quad C'(x) = 2e^{-2x}$$

On prend donc $C : x \mapsto -e^{-2x}$. Ainsi, $y_P : x \mapsto -e^{-2x}e^{x} = -e^{-x}$ est une solution particulière de (P). Les solutions de (P) sont donc exactement les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{x} - e^{-x}$.

2. L'équation homogène associée à (N) est $y' + y = 0$, les solutions de cette équation homogène sont exactement les fonctions $x \mapsto Ce^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$. On cherche y_P de la forme $y_P : x \mapsto C(x)e^{-x}$ où C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y_P'(x) + y_P(x) = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = C'(x)e^{-x} = 2e^{-x} \quad \iff \quad C'(x) = 2$$

On prend donc $C : x \mapsto 2x$, ainsi, $y_P : x \mapsto 2xe^{-x}$ est une solution particulière de (N). Les solutions de (N) sont donc exactement les fonctions de la forme $x \mapsto (C + 2x)e^{-x}$.

3. - **Analyse :** supposons que f soit une fonction solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Comme f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = |f(x)| + 2e^{-x}$, or $|f(x)| \geqslant 0$ et $2e^{-x} > 0$, par somme d'inégalités (une large et une stricte), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. Ceci prouve que f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
   — Supposons que f soit une fonction positive sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |f(x)|$. Ainsi, f est solution de (P). Donc d'après la question 1, il existe $C \in \mathbb{R}$. tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = Ce^{x} - e^{-x}$$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Ce^{x} \geqslant e^{-x} > 0$, nécessairement, $C > 0$, et par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(C) + x \geqslant -x$, donc $2x \geqslant \ln(C)$. En particulier, pour $x = \ln(C)/2 - 1$, on obtient que $-2 \geqslant 0$ ce qui est impossible. Ainsi, f ne peut pas être positive. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 0$.
   — Supposons que f soit une fonction négative sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -|f(x)|$. Ainsi, f est solution de (N). Donc d'après la question 2, il existe $C \in \mathbb{R}$. tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (C + 2x)e^{-x}$, or $f\left(1 - \dfrac{C}{2}\right) = 2e^{\frac{C}{2}-1} > 0$. Ceci est absurde, car f est supposée négative. Dès lors, f ne peut pas être négative. Ainsi, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) > 0$.

   Ainsi, $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $[\,a\,;b\,]$ (ou $[\,b\,;a\,]$). Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [\,a\,;b\,]$ (ou $x_0 \in [\,b\,;a\,]$) tel que $f(x_0) = 0$. Or, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\forall x > x_0 \quad f(x) > f(x_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x < x_0 \quad f(x) < f(x_0)$$

Ainsi, f est positive sur $[\,x_0\,;+\infty\,[$ donc est solution de (P) sur $[\,x_0\,;+\infty\,[$ Ainsi, il existe $C\in\mathbb{R}$, tel que pour tout $x\geqslant x_0$, $f(x)=C\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$. Or, $f(x_0)=0$, donc $C\mathrm{e}^{x_0}-\mathrm{e}^{-x_0}=0$ d'où $C=\mathrm{e}^{-2x_0}$. Ainsi, pour tout $x\geqslant x_0$,

$$f(x)=\mathrm{e}^{-2x_0}\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$$

.

De plus, f est négative sur $]\,-\infty\,;x_0\,]$ donc est solution de (N) sur $]\,-\infty\,;x_0\,]$. Donc, il existe $\tilde{C}\in\mathbb{R}$, tel que pour tout $x\leqslant x_0$, $f(x)=(\tilde{C}+2x)\mathrm{e}^{-x}$ Comme, $f(x_0)=0$, on en déduit que $\tilde{C}+2x_0=0$, donc que $\tilde{C}=-2x_0$. Ainsi, pour tout $x\leqslant x_0$,

$$f(x)=2(x-x_0)\mathrm{e}^{-x}$$

- **Synthèse :** Soit $x_0\in\mathbb{R}$, on pose pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\mathrm{e}^{-2x_0}\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\quad\text{si } x>x_0\qquad\text{et}\qquad f(x)=2(x-x_0)\mathrm{e}^{-x}\quad\text{si } x\leqslant x_0$$

On remarque que pour $x\geqslant x_0$, $f(x)=\mathrm{e}^{-2x_0}\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ (l'expression est aussi vraie en x_0 car cette expression s'annule en x_0 et $f(x_0)=0$). Or, $x\mapsto\mathrm{e}^{-2x_0}\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont), de dérivée $x\mapsto x\mapsto\mathrm{e}^{-2x_0}\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$, ainsi, f est dérivable sur $]\,x_0\,;+\infty\,[$ et dérivable à droite en x_0 et

$$\forall x>x_0\quad f'(x)=\mathrm{e}^{-2x_0}\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\qquad\text{et}\qquad f'_d(x_0)=2\mathrm{e}^{-x_0}$$

De plus, soit $x>x_0$, alors $x-2x_0\geqslant -x$, par croissance de l'exponentielle, $\mathrm{e}^{-2x_0+x}\geqslant\mathrm{e}^{-x}$, donc $f(x)\geqslant 0$. Ainsi, pour $x>x_0$, $f'(x)-|f(x)|=f'(x)-f(x)=2\mathrm{e}^{-x}$.
De même, $x\mapsto 2(x-x_0)\mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont), de dérivée

$$x\mapsto 2x\mathrm{e}^{-x}-(2(x-x_0))\mathrm{e}^{-x}=2x_0\mathrm{e}^{-x}$$

ainsi, f est dérivable sur $]\,-\infty\,;x_0\,[$ et dérivable à gauche en x_0 et

$$\forall x<x_0\quad f'(x)=2x_0\mathrm{e}^{-x}\qquad\text{et}\qquad f'_g(x_0)=2x_0\mathrm{e}^{-x_0}$$

De plus, soit $x<x_0$, alors $f(x)\leqslant 0$, ainsi, $f'(x)-|f(x)|=f'(x)+f(x)=2\mathrm{e}^{-x}$.
— Si $x_0\neq 1$, f n'est pas dérivable en x_0 (les dérivées à droite et à gauche en x_0 sont différentes), et donc f n'est pas solution de (E).
— Si $x_0=1$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=2\mathrm{e}^{-x_0}$ et $f(x_0)=0$ de sorte que

$$f'(x_0)-|f(x_0)|=2\mathrm{e}^{-x_0}$$

Ainsi, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Par analyse-synthèse, la seule solution de (E) est

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\begin{cases}\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e}^{-x} & \text{si}\quad x>1\\ 2(x-1)\mathrm{e}^{-x} & \text{si}\quad x\leqslant 1\end{cases}\end{cases}$$

Remarque 1. On peut écrire la fonction f en une seule expression avec des indicatrices :

$$f:x\mapsto(\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e}^{-x})\mathbb{1}_{]\,1\,;+\infty\,[}(x)+(2(x-1)\mathrm{e}^{-x})\mathbb{1}_{]\,-\infty\,;1\,]}(x)$$

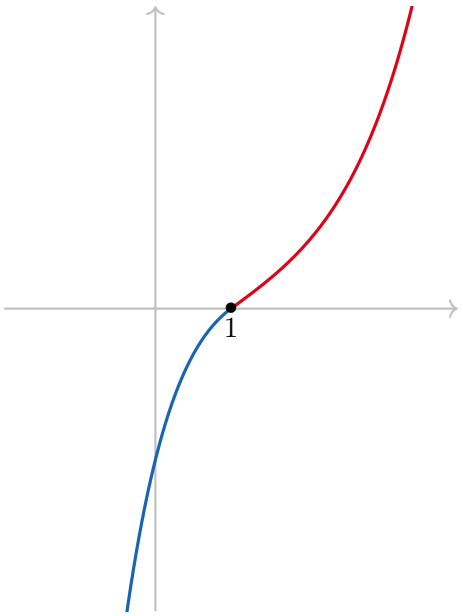


FIGURE 1 – Tracé de la fonction f la seule solution de (E)