DS3

14 Novembre 2026

- L'usage de la calculatrice, de documents, de téléphone, de montre intelligente (sic) est interdit.
- La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation.
- Les résultats de chaque question seront encadrés.
- Vous pouvez faire les exercices et problèmes dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer quel exercice vous êtes en train de traiter.
- Au sein d'un exercice, il faut essayer, autant que possible, de traiter les questions dans l'ordre.
- Si un/une candidat/candidate relève ce qu'il/elle lui semble être une erreur d'énoncé, il/elle l'indique clairement sur sa copie et indique les initiatives qu'il/elle a pris.

Exercice 0 : Ne vous trompez pas de cible !

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} 4x+2y+6z &= 8 \\ 5x+4y+9z &= 13 \\ x+2y+3z &= 5 \end{cases}$

Exercice 1 : Nager dans la baie de la Somme !

Soit un entier n supérieur ou égal à 2.

1. Calculer $\sum_{k=n+1}^{2n} (3k-8)$.
2. Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison 2 telle que $u_4 = 8$. Calculer $\sum_{k=2}^{n} u_k$.
3. Calculer $\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$
4. Rappeler la formule du binôme de Newton (on introduira tous les objets utilisés).
5. Calculer $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k-1} 3^{k+1}$
6. Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^{j-i}$.

Exercice 2 : Comme Dune, l'intégrale est en six volumes

1. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x)\sin(x)^2 \, \mathrm{d}x$.
2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin(x) \, \mathrm{d}x$.
3. À l'aide des formules d'Euler, linéariser $\cos(a)\cos(b)$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
4. Déduire de la question précédente, la valeur de $\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt) \, \mathrm{d}t$ pour $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$.
5. À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 11\mathrm{e}^x + 18}$.
6. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$.

Exercice 3 : La somme prend la tangente (vers π) !

1. Rappeler, sans preuve, l'ensemble de définition de tan, l'ensemble de définition de sa dérivée ainsi que l'expression de cette dérivée.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) \, \mathrm{d}t$.

2. Calculer I_0, I_1 et I_2.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
4. Démontrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
5. En déduire que $(I_n)_n$ converge.
6. En posant $u = \tan(t)$ démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$.
7. En déduire la limite de $(I_n)_n$.
8. Donner la valeur de I_3, I_4, I_5 et I_6.

9. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$I_{2p} = (-1)^p \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = (-1)^p \left(\frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{2k} \right)$$
10. Écrire une fonction Python `Somme(p)` qui à $p \in \mathbb{N}^*$, renvoie $4 \times \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Remarque 1. La fonction `Somme(p)` renvoie donc une approximation de π lorsque p est assez grand.

Exercice 4 : Allons ensembles de la partie, le jour de gloire...

1. Soient E et F deux ensembles. Recopiez et complétez l'équivalence : $F \in \mathscr{P}(E) \iff$

Soient $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On définit un nouvel ensemble noté $A+B$ par compréhension :
$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \quad \exists b \in B \qquad x = a + b\}$$
On peut aussi le définir de façon équivalente par paramétrage : $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

2. Déterminer l'ensemble $A + B$ dans les cas suivants :
   (a) $A = \{2\}$ et $B = \{3\}$.
   (b) $A = \{2; 3\}$ et $B = \{-1; 3\}$.
   (c) A quelconque et $B = \varnothing$.
   (d) $A \neq \varnothing$ et $B = \mathbb{R}$
   (e) $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$.

   On justifiera tous les cas sauf les cas 2a et 2b.
3. Soient $(A, A', B, B') \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^4$ montrer que
$$(A \subset A' \quad \text{et} \quad B \subset B') \implies A + B \subset A' + B'$$
4. Montrer qu'il existe un unique $N \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $A + N = A$.
5. Considérons l'ensemble N définie à la question 4. Est-ce que pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, il existe $B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que $A + B = N$?
6. Soient $(A, A', B) \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^3$, montrer que
$$(A \cup A') + B = (A + B) \cup (A' + B)$$
7. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^2$ avec $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. On pose $f : \begin{cases} A \times B \longrightarrow A + B \\ (a, b) \longmapsto a + b \end{cases}$. La fonction f est-elle nécessairement surjective ? injective ? On justifiera ses réponses.
8. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^2$ avec $A \neq \varnothing$. Montrer que $0 \in B \implies A \subset A + B$
9. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

On admet le résultat suivant : soit I une partie de $\mathbb{R}$, alors I est un intervalle si et seulement si pour tout $(a, b) \in I^2$, $a \leqslant b$ implique que $[\,a\,;b\,] \subset I$.

10. Si A et B sont des intervalles de $\mathbb{R}$, est-ce que $A + B$ est un intervalle de $\mathbb{R}$?

Exercice 5 : Une équation différentielle absolument difficile

Considérons trois équations différentielles sur $\mathbb{R}$:
$$y'(x) - y(x) = 2\mathrm{e}^{-x} \qquad (P)$$
$$y'(x) + y(x) = 2\mathrm{e}^{-x} \qquad (N)$$
$$y'(x) - |y(x)| = 2\mathrm{e}^{-x} \qquad (E)$$

Remarque 2. (E) n'est pas une équation différentielle linéaire contrairement à (P) et (N).

1. Résoudre (P)
2. Résoudre (N)
3. Résoudre (E).