Chapitre 7
Nombres réels et suites numériques

Dans ce chapitre, après avoir étudié les nombres réels, nous allons étudier les suites numériques. Nous donnerons des définitions précises de la limite d'une suite et cela nous permettra de démontrer les théorèmes sur les limites de suites de façon rigoureuse. Nous étudierons quelques suites particulières : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques ainsi que l'étude des suites récurrentes.

Attention : utiliser un lecteur de PDF adapté

Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de PDF capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1 Nombres réels **2**
- 1.1 Majorant/minorant/maximum/minimum/borne supérieure/borne inférieure . . . 2
- 1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$ . . . 3
- 1.3 Partie entière . . . 3

2 Suites **4**
- 2.1 Définition d'une suite . . . 4
- 2.2 Sens de variation d'une suite . . . 5
- 2.3 Suites majorées, minorées et bornées . . . 5
- 2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou 2 . . . 5
  - 2.4.1 Suite arithmétique . . . 5
  - 2.4.2 Suite géométrique . . . 5
  - 2.4.3 Suites arithmético-géométrique . . . 6
  - 2.4.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 . . . 6
- 2.5 Limite d'une suite réelle . . . 6
  - 2.5.1 Convergence et divergence . . . 7
  - 2.5.2 Opérations sur les limites . . . 8
  - 2.5.3 Théorèmes d'existence de limite . . . 9
  - 2.5.4 Suites extraites . . . 10
- 2.6 Étude des suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 10
- 2.7 Extension aux suites complexes . . . 12
- 2.8 Relations de comparaison . . . 12
  - 2.8.1 Relation de négligeabilité . . . 12
  - 2.8.2 Relation de domination . . . 13
  - 2.8.3 Relation d'équivalence . . . 13

1 Nombres réels

1.1 Majorant/minorant/maximum/minimum/borne supérieure/borne inférieure

Définition d'un majorant, d'un minorant, d'une partie majorée, minorée et bornée

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **un majorant** de A si : $\forall a \in A \quad a \leqslant M$
- On dit que $m \in \mathbb{R}$ est **un minorant** de A si : $\forall a \in A \quad m \leqslant a$
- On dit que A est **majorée** si elle a un majorant. C'est-à-dire si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \leqslant M$
- On dit que A est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée :

$$A \text{ bornée} \iff \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall a \in A \quad m \leqslant a \leqslant M$$

Exemples 1.
1. L'intervalle $[\,0\,;1\,[$ est
2. L'intervalle $]\,0\,;1\,[$ est
3. L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est
4. L'ensemble $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est

Attention, il n'y a pas unicité du majorant/minorant

On dit donc «*un majorant*», «*un minorant*» et non «*le majorant*».

Définition d'un maximum/minimum

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $(M, m) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que M est **le maximum/le plus grand élément** de A si $M \in A$ et M est un majorant de A. On note $M = \max(A)$.
- On dit que m est **le minimum/le plus petit élément** de A si $m \in A$ et m est un minorant de A. On note $m = \min(A)$.
- Un **extremum** de A est le maximum ou le minimum de A.

Remarque 1. Si le maximum/minimum de A existe alors il est unique.

Exemple 2. Si $A \subset \mathbb{R}$ avec A non vide et ayant un nombre fini d'éléments, alors A admet un maximum et un minimum.

Définition d'une borne supérieure/inférieure

On appelle **borne supérieure** de A le plus petit des majorants de A (s'il existe). On le note $\sup(A)$.
On appelle **borne inférieure** de A le plus grand des minorants de A (s'il existe). On le note $\inf(A)$.

Remarques 2.
- Lorsqu'il y a existence de la borne supérieure/inférieure, alors cette borne est unique.
- Une borne supérieure n'est pas nécessairement un maximum. Une borne inférieure n'est pas nécessairement un minimum.
- Si A n'est pas majorée, alors, par convention $\sup A = +\infty$. Si A n'est pas minorée, par convention, $\inf A = -\infty$.
- Si A admet une borne supérieure, alors cette borne supérieure coupe $\mathbb{R}$ en deux parties :
  — Si $x \geqslant \sup(A)$, alors, x est un majorant de A : pour tout $a \in A$, $a \leqslant x$.
  — Si $x < \sup(A)$, alors, x n'est pas un majorant de A : il existe $a \in A$ tel que $x < a$.

Théorème n° 1 : de la borne supérieure/inférieure *(admis)*

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Proposition n° 1 : lien entre bornes supérieures/inférieures et extrema

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A admet un plus grand élément alors elle admet une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$.
2. Si A admet un plus petit élément alors elle admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$.

Exemples 3. Compléter le tableau ci-dessous. Démontrer rigoureusement les lignes 5 et 8.

Ensemble E	$\min(E)$	$\inf(E)$	$\max(E)$	$\sup(E)$
$E = \{0\}$				
$E = \{0;1\}$				
$E =]\,0\,;1\,[$				
$E = [\,0\,;1\,[$				
$E = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$				
$E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$				
$E = [\,0\,;1\,[\cap \mathbb{Q}$				
$E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$				

Proposition n° 2 : cas des parties de $\mathbb{Z}$

1. Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ non vide, alors A admet un minimum ssi elle est minorée.
2. Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ non vide, alors A admet un maximum ssi elle est majorée.
3. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ non vide, alors A admet un minimum.

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$. Les ensembles suivants sont appelés **intervalles** :

- $[\,a\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ intervalle **fermé borné** ou **segment**
- $]\,a\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ intervalle **ouvert borné**
- $]\,a\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $[\,a\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ intervalles **bornés semi-ouverts ou semi-fermés**
- $[\,a\,;+\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$, $]\,a\,;+\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ intervalles **minorés et non majorés**
- $]\,-\infty\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$, $]\,-\infty\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ intervalles **majorés et non minorés**
- $\mathbb{R} =]\,-\infty\,;+\infty\,[$ intervalle **ouvert** et **fermé** non majoré non minorée, $\varnothing$ intervalle **ouvert** et **fermé**

Proposition n° 3 : caractérisation des intervalles

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Alors : I est un intervalle de $\mathbb{R}$ $\iff$ $\forall (x,y) \in I^2 \quad x \leqslant y \implies [\,x\,;y\,] \subset I$

Remarques 3.

- Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont donc les parties en un seul morceau.
- L'intersection d'intervalles est un intervalle et l'union de deux intervalles non disjoints est un intervalle.
- $[\,0\,;1\,] \cup [\,2\,;3\,[$ n'est pas un intervalle.
- $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.3 Partie entière

Définition de la partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x le plus grand entier relatif p tel que $p \leqslant x$. On la note $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Exemples 4. $\lfloor e \rfloor =$ $E(-\pi) =$ $E(-3) =$ $E(1/3) =$

Proposition n° 4 : propriétés de la partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

1. $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$
2. $x - 1 < E(x) \leqslant x$
3. $n \leqslant x \iff n \leqslant E(x)$
4. $E(x + n) = E(x) + n$
5. $n \leqslant x < n + 1 \iff n = E(x)$
6. $x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$

Remarques 4.

- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$, alors $2p \leqslant x$ ssi $p \leqslant E\left(\frac{p}{2}\right)$ et $2p + 1 \leqslant x$ ssi $p \leqslant E\left(\frac{p-1}{2}\right)$.
- $E(x)$ et $E(x) + 1$ coupent $\mathbb{Z}$ en deux morceaux : soit $n \in \mathbb{Z}$, si $n \leqslant E(x)$, alors $n \leqslant x$, si $n \geqslant E(x) + 1$, alors $n > x$.

2 Suites

2.1 Définition d'une suite

Définition d'une suite numérique réelle ou complexe

Une **suite numérique réelle** est une application $u \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Une **suite numérique complexe** est une application $u \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est noté u_n et est appelé n-ième **terme** de la suite (ou **terme d'indice** n ou de **rang** n) et la suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$. L'ensemble des suites réelles (resp. complexes) est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$).

Attention à ne pas confondre suite et nombre

$u = (u_n)$ est une suite, u_n est un nombre pour n donné. Tout comme, f est une fonction et $f(x)$ est un nombre.

Remarque 5. La suite (u_n) est parfois définie à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Ainsi, $(1/n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est définie à partir de 1.

Définition des différentes façons de définir une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_n$ est définie

1. **explicitement** si le terme u_n est défini en fonction de n.
2. **implicitement** si le terme u_n est défini comme l'unique réel vérifiant une certaine propriété.
3. **par récurrence** si le terme u_n est défini à partir des termes précédents de la suite u.

Exemples 5.

1. La suite $(u_n)_n$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(n^2 + 1)$.
2. La suite $(v_n)_n$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est l'unique solution réelle de $x^3 + x - 1 = n$.
3. La suite $(w_n)_n$ définie par : $w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \sqrt{w_n + 3}$.

Remarque 6. L'étude d'une suite est souvent plus simple si elle est définie explicitement.

Définition des opérations sur les suites

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. La somme de u et v est la suite notée $u + v$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u + v)_n = u_n + v_n$.
2. Le produit de u et v est la suite, notée $u \times v$, définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u \times v)_n = u_n \times v_n$.
3. Le produit de u par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la suite notée λu, définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda u)_n = \lambda u_n$.
4. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, le quotient de u par v est la suite, notée $\frac{u}{v}$, définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{u}{v}\right)_n = \frac{u_n}{v_n}$.

2.2 Sens de variation d'une suite

Définition de la variation d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_n$ est **croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$
On dit que $(u_n)_n$ est **strictement croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$
On dit que $(u_n)_n$ est **décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$
On dit que $(u_n)_n$ est **strictement décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$
On dit que $(u_n)_n$ est **stationnaire** si : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n = u_{n_0}$

Exemples 6.
- Soit $u_n = f(n)$ où $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Si f est monotone sur $\mathbb{R}_+$, alors (u_n) est de même monotonie.
- Quel est le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = n!/n^n$?

2.3 Suites majorées, minorées et bornées

Définition des suites majorées, minorées et bornées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.
1. On dit que $(u_n)_n$ est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$
2. On dit que $(u_n)_n$ est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant u_n$
3. La suite $(u_n)_n$ est dite **bornée** lorsqu'elle est minorée et majorée : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant u_n \leqslant M$

Proposition n° 5 : caractérisation des suites bornées

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Exemple 7. Montrer que la somme et le produit de suites bornées sont bornées.

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou 2

Remarque 7. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on prend des suites à valeurs complexes ou réelles.

2.4.1 Suite arithmétique

Définition d'une suite arithmétique

Soit $r \in \mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_n$ est **arithmétique** de raison r si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$

Remarque 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et deux entiers n et m, alors $u_n = u_m + (n-m)r$

Proposition n° 6 : somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique et deux entiers $m \leqslant n$, alors $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{(u_m + u_n)}{2}(n - m + 1)$

2.4.2 Suite géométrique

Définition d'une suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_n$ est **géométrique** de raison q si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times q$

Remarque 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et deux entiers n et m, alors $u_n = u_m \times q^{n-m}$

Proposition n° 7 : somme de termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et deux entiers $n \geqslant m$ alors $$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$$

2.4.3 Suites arithmético-géométrique

Définition d'une suite arithmético-géométrique

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** si : $\exists (a,b) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$

Comment trouver l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique ? (avec $a \neq 1$)

1. Chercher le point fixe c de l'équation : $c = ac + b$.
2. Poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - c$ et montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Déterminer l'expression générale de v_n.
4. En déduire l'expression générale de u_n.

Exemple 8. Trouver la limite de $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

2.4.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a,b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Pour une telle suite, l'équation $r^2 = ar + b$ est appelée **équation caractéristique**.

Théorème n° 2 : expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}^*$. Notons $E_{\mathbb{K}} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$ et Δ le discriminant de $r^2 = ar+b$.

1. Si l'équation caractéristique admet deux racines dans $\mathbb{K}$ r_1 et r_2 ($\Delta > 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta \neq 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :
$$E_{\mathbb{K}} = \left\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \quad \exists (A,B) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n\right\}$$
2. Si l'équation caractéristique admet une racine double r_1 ($\Delta = 0$) :
$$E_{\mathbb{K}} = \left\{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \quad \exists (A,B) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (An+B){r_1}^n\right\}$$
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, notons $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ les deux racines complexes de l'équation caractéristique :
$$E_{\mathbb{R}} = \left\{(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)\right\}$$

Si $(u_n)_n \in E_{\mathbb{K}}$, A et B sont uniques, on les détermine grâce à deux valeurs de la suite (en général u_0 et u_1).

Exemple 9. Trouver l'expression explicite de la suite définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

2.5 Limite d'une suite réelle

Remarque 10. Dans cette partie, nous ne considérerons que des suites réelles.

2.5.1 Convergence et divergence

Définition de la convergence d'une suite

1. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$, et on note $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ (ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$) si :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** s'il existe un réel ℓ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
3. Une suite non convergente est dite **divergente**. On dit que la suite **diverge**.

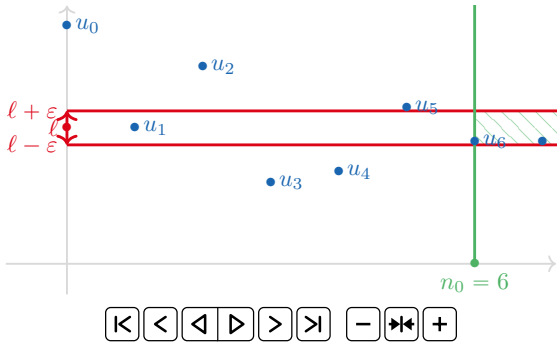


FIGURE 1 – Les termes de la suite sont dans le tube rouge entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$ à partir d'un certain rang n_0.

Exemples 10.
- Si $(u_n)_n$ est stationnaire, montrer qu'elle converge.
- Soit $u_n = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ converge vers 0.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ alors $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\ell|$, la réciproque étant fausse.

Proposition n° 8 : unicité de la limite
Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est unique.

Proposition n° 9 : une suite convergente est bornée
Toute suite réelle convergente est bornée.

Remarque 11. Par contraposée, on en déduit qu'une suite non bornée est divergente.
La réciproque n'est pas vraie ! Une suite bornée ne converge pas nécessairement. Comme la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n =$

Définition d'une limite infinie

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$), et on note $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ si
$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \implies u_n \geqslant A$$
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ (ou diverge vers $-\infty$), et on note $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ si
$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \implies u_n \leqslant A$$

Remarque 12. Une suite divergente n'a pas nécessairement de limite infinie : considérer $u_n = (-1)^n n$.

Exemple 11. Soit $u_n = n$ pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

2.5.2 Opérations sur les limites

Proposition n° 10 : opérations sur les limites finies

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles telles que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell' \in \mathbb{R}$.

1. $u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell + \ell'$
2. $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\ell'$
3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda\ell$
4. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, alors $u_n w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Proposition n° 11 : règles opératoires sur les limites infinies

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui diverge vers $+\infty$ et $\alpha > 0$

1. Si $(u_n)_n$ est minorée, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
2. Si $(u_n)_n$ est minorée par $\alpha > 0$, $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Remarque 13.

- On déduit des règles précédentes les tableaux ci-dessous :

$\lim_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

(a) Limites de la somme de deux suites suivant leur limite.

$\lim_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$	0	$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$
0	FI	0	0	0	FI
$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

(b) Limites du produit de deux suites suivant leur limite.

- Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $\ell > 0$ (resp $\ell < 0$), alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 0$ (resp. $u_n < 0$).

Proposition n° 12 : limite de l'inverse

Soit $(u_n)_n$ une suite ayant une limite ℓ.

1. Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$.
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang (resp. $u_n < 0$) alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (resp. $-\infty$).

Remarque 14. Pour la limite du quotient, on écrit $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers 0 (ou toutes les deux vers $+\infty$), alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une forme indéterminée.

Théorème n° 3 : les inégalités larges sont conservées par passage à la limite

Soient $(m, M) \in \mathbb{R}^2$, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.

1. Si $u_n \leqslant M$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant M$.
2. Si $u_n \geqslant m$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \geqslant m$.
3. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Remarque 15. Soit I un intervalle fermé, si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, alors $\ell \in I$.

Péril imminent : les inégalités strictes ne «passent» pas à la limite

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \not> 0$. Si I est un intervalle ouvert ou semi-ouvert et $(u_n)_n$ une suite convergente vers ℓ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, alors ℓ peut ne pas appartenir à I.

2.5.3 Théorèmes d'existence de limite

Théorème n° 4 de comparaison

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant v_n$

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
2. Si $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

Remarque 16. Pour montrer qu'une suite diverge vers $+\infty$, on essaie de la minorer par une suite qui diverge vers $+\infty$.

Exemple 12. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n\sqrt{n} + n$?

Théorème n° 5 d'encadrement (aka des gendarmes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Exemple 13. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n}{n^2+k}$. Par encadrement, étudier la convergence de $(u_n)_n$.

Définition de l'approximation décimale

Le décimal $a_n = \dfrac{E(10^n x)}{10^n}$ est appelé **approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près**.

Le décimal $b_n = \dfrac{E(10^n x)+1}{10^n}$ est appelé **approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près**.

Exemple 14. Si $x = \pi$, que valent a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 ?

Théorème n° 6 : approximations décimales d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x < b_n$, $(a_n, b_n) \in \mathbb{D}^2$ et $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Remarque 17. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels qui tend vers x. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème n° 7 de convergence monotone/de la limite monotone

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors elle converge vers $\sup\{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors elle converge $\inf\{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Remarques 18.
- Ceci permet de prouver l'existence d'une limite finie ℓ mais ne fournit pas la valeur explicite de ℓ.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante et positive, alors d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge mais pas nécessairement vers 0.

Définition des suites adjacentes

On dit que deux suites réelles sont **adjacentes** si l'une croît, l'autre décroît et la différence des deux tend vers 0.

Théorème n° 8 des suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite. Cette limite est un majorant de la suite croissante.

Exemple classique de suites adjacentes

Montrer que les suites $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

2.5.4 Suites extraites

Définition d'une suite extraite

Soit $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante. On dit que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite/sous-suite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 19. Les suites extraites les plus utilisées sont les suites d'indices pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et d'indices impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème n° 9 : si une suite admet une limite, alors toute sous-suite admet la même limite

Si $(u_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Alors, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ pour toute $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante.

Remarque 20. Pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite, on peut raisonner par l'absurde et considérer plusieurs extractions qui auront des limites différentes.

Exemple 15. Montrer que $((-1)^n)_n$ diverge.

Proposition n° 13 des suites extraites d'indices pairs et impairs

Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers ℓ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

2.6 Étude des suites récurrentes : $u_{n+1}=f(u_n)$

Définition d'un intervalle stable

On dit que l'intervalle I est **stable** par $f\colon I\to\mathbb{R}$ si $f(I)\subset I$.

Remarques 21.
- Si I est stable par f, alors cela revient à écrire $f\colon I\to I$.
- Pour montrer qu'un intervalle est stable, on peut déterminer l'image de f grâce au théorème de la bijection strictement monotone ou utiliser des inégalités.
- Dans cette partie, $f\colon I\to I$. On étudie la suite (u_n) définie par $u_0\in I$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$. On dit que $(u_n)_n$ est une **suite récurrente associée** à f.

Proposition n° 14 de l'intervalle stable

Soient $f\colon I\to I$ et $u_0\in I$. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à f est bien définie et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in I$.

Proposition n° 15 : monotonie de (u_n) si f croissante

Soit $f\colon I \to I$ croissante sur I et $u_0 \in I$. Si $u_1 \geqslant u_0$, alors (u_n) est croissante. Si $u_1 \leqslant u_0$, alors (u_n) est décroissante.

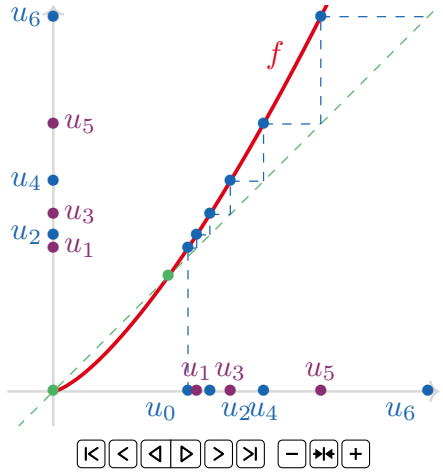
Péril imminent la suite n'est pas forcément croissante

Si $f\colon I \to I$ est croissante et que $(u_n)_n$ est une suite associée à f, $(u_n)_n$ est monotone pas forcément croissante.

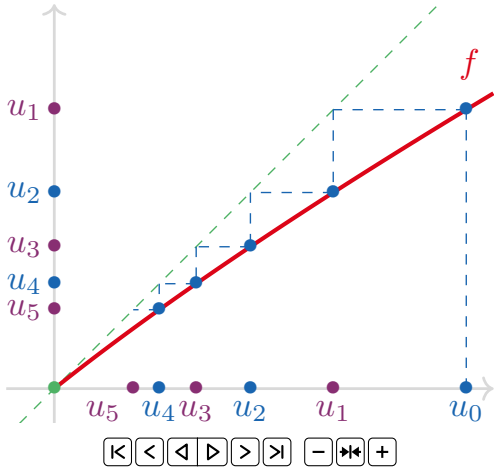
Remarque 22. Si $f\colon I \to I$ est décroissante sur I alors $g = f \circ f$ est croissante sur I et les suites extraites des termes pairs et des termes impairs sont des suites récurrentes associées à g donc elles sont monotones.

Théorème n° 10 du point fixe

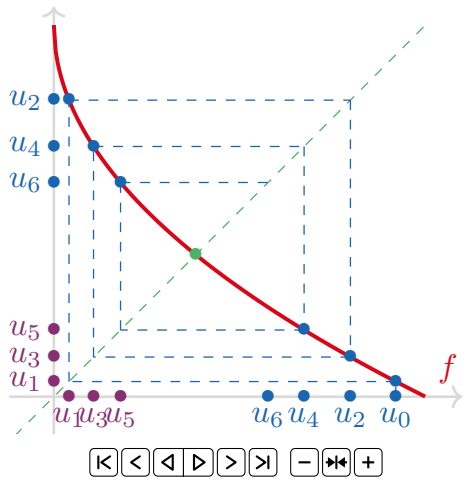
Soit $f\colon I \to I$. Si $(u_n)_n$, une suite associée à f, converge vers $\ell \in I$ et que f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$ (on dit que ℓ est un **point fixe** de f).



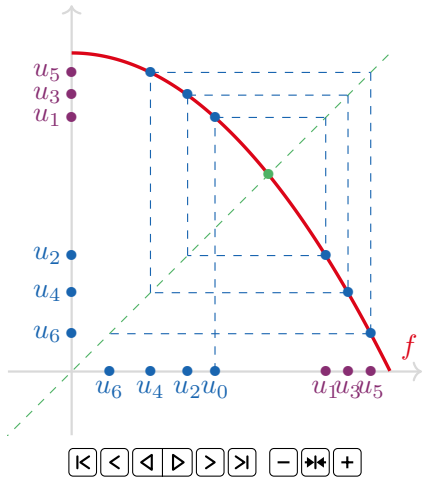
(a) f croît et $(u_n)_n$ croît et diverge.



(b) f croît et $(u_n)_n$ décroît et converge vers un point fixe de f.



(c) f décroît et $(u_n)_n$, $(u_{2n})_n$ croit $(u_{2n+1})_n$ décroît et elles convergent vers le même point fixe de $f \circ f$, ainsi $(u_n)_n$ converge.



(d) f décroît et $(u_{2n})_n$ croît, $(u_{2n+1})_n$ décroît et elles convergent vers des points fixes de $f \circ f$ différents, ainsi $(u_n)_n$ diverge.

FIGURE 2 – Tracées de la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$ dans plusieurs cas.

Exemple 16. Soit $(u_n)_n$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = {u_n}^2$. Étudier la convergence de $(u_n)_n$.

2.7 Extension aux suites complexes

On peut étendre aux suites complexes les notions des suites réelles qui n'utilisent pas la notion d'ordre sur $\mathbb{R}$ (les notions de suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées etc. n'existent pas pour les suites complexes !). En revanche, la valeur absolue peut être remplacée par le module.

Définition d'une suite bornée

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Définition d'une limite d'une suite complexe

On dit qu'une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Remarque 23. $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ ssi $|z_n - \ell| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Proposition n° 16 : convergence des suites complexes en fonction des parties réelles et imaginaires

Une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. De plus, si c'est le cas :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$

Exemple des suites géométriques

Soit $z \in \mathbb{C}$, considérons la suite géométrique $(z^n)_n$ de raison z :

1. Si $|z| < 1$, alors $z^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
2. Si $|z| > 1$, alors $(z^n)_n$ est non bornée donc diverge.
3. Si $z = 1$, alors $z^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
4. Si $z \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$, alors $(z^n)_n$ est bornée et diverge.

Remarque 24. En résumé :

Ce qui reste valable	Ce qui n'est plus valable
Unicité de la limite	Majorant/Minorant
Une suite convergente est bornée	Monotonie
Opérations sur les limites finies	Limites infinies
Suites extraites	Passage à la limite des inégalités
Suites arithmétiques et géométriques	Théorème des gendarmes
Suites arithmético-géométriques	Théorème de la limite monotone
Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	Suites adjacentes

2.8 Relations de comparaison

Dans cette partie, quand on fera le quotient de deux suites, c'est qu'on supposera implicitement, que celle au dénominateur ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

2.8.1 Relation de négligeabilité

Définition de la relation de négligeabilité

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On note alors $u_n = \mathcal{o}(v_n)$.

Remarque 25. Sans division : $u_n = o(v_n) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \implies |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$

Exemples 17.
- $n^2 = o(n)$? $n = o(n^2)$? $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$? $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$?
- Montrer que $\ln n = o(n)$.
- $u_n = o(1)$ ssi
- Traduire $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec une relation de négligeabilité.

Proposition n° 17 : croissances comparées interprétées avec les o

1. Pour $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$ et $(\ln n)^\alpha = o((\ln n)^\beta)$.
2. Pour $0 < a < b$, $a^n = o(b^n)$.
3. Pour $\alpha, \beta > 0$ et $\gamma > 1$, $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$, $n^\beta = o(\gamma^n)$, $n^\beta = o(e^{\alpha n})$ $\gamma^n = o(n!)$ $n! = o(n^n)$.

2.8.2 Relation de domination

Définition de la relation de domination

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée** devant une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(\frac{u_n}{v_n})_n$ est bornée. On note alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Remarque 26. Sans division : $u_n = \mathcal{O}(v_n) \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |u_n| \leqslant M|v_n|$

Exemples 18.
- $u_n = o(v_n) \implies u_n = \mathcal{O}(v_n)$
- $u_n = \mathcal{O}(1)$ ssi
- Soit pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. A-t-on $u_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$? $u_n = o(\frac{1}{n})$?

Attention à la notation

$u_n = \mathcal{O}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$ n'impliquent en rien $u_n = v_n$!
La relation $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ veut dire que (u_n) fait partie de l'ensemble des suites dominées par (v_n).

2.8.3 Relation d'équivalence

Définition de la relation d'équivalence

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente** à une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Remarque 27. Sans division : $u_n \sim v_n \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \implies |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$.

Exemples 19.
- Démontrer que $2n^2 + 5n \sim 2n^2$, est-ce-que $2n^2 + 5n \sim n^2$?
- Si $\ell \neq 0$, alors : $u_n \sim \ell$ ssi u_n
- Déterminer un équivalent simple de $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$

Péril imminent pas d'équivalent à 0

On n'écrit jamais $u_n \sim 0$ car cela n'a pas de sens, tout comme $u_n \sim +\infty$

Proposition n° 18 : propriétés des équivalents

1. $u_n \sim u_n$ (*réflexivité*)
2. Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$ (*symétrie*)
3. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$ (*transitivité*)
4. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$
5. $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$
6. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$
7. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$ alors $u_n w_n \sim v_n z_n$ et $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{z_n}$
8. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n{}^p \sim v_n{}^p$ $(p \in \mathbb{Z})$ et $u_n{}^\alpha \sim v_n{}^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n > 0$, $v_n > 0)$

Péril imminent pas de sommes d'équivalents

Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$, vous ne pouvez pas en déduire que $u_n + w_n \sim v_n + z_n$. Prenons $u_n = n$, $v_n = n+1$, $w_n = -n-1$ et $z_n = -n$.